

Musterprüfung Nr. 001 (Nachtermin) zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 1: ohne Hilfsmittel

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben sämtliche Aufgaben zu bearbeiten.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion

$$f: x \mapsto x^3 - 3x^2 - 9x + 27, \quad D_f = \mathbb{R}$$

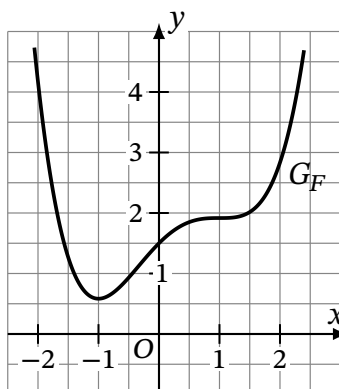
Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

3 1.1 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f samt ihrer Vielfachheit und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \rightarrow -\infty$ und für $x \rightarrow +\infty$ an.

4 1.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f .

3 1.3 Ermitteln Sie die Stelle, an der G_f parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = -12x$ verläuft, und begründen Sie, dass es genau eine solche Stelle gibt.

5 2 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_F einer Stammfunktion F einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f .



Entscheiden Sie jeweils anhand der Abbildung, ob folgende Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind bzw. ob dies mit den gegebenen Informationen nicht entscheidbar (n. e.) ist. Kreuzen Sie entsprechend an.

Hinweis: Jedes richtig gesetzte Kreuz ergibt +1 BE, jedes falsch gesetzte - 0,5 BE und jedes nicht gesetzte 0 BE. Im ungünstigsten Fall wird die Aufgabe mit 0 BE bewertet.

Aussage	w	f	n. e.
$f(-1) = 0$			
Die Funktionswerte von f wechseln an der Stelle $x = 1$ ihr Vorzeichen.			
Der Graph von f besitzt im Intervall $] -1; 1[$ einen Hochpunkt.			
$\int_0^2 f(x) dx < 0$			
Der Graph G_F hat mit der x -Achse keinen gemeinsamen Punkt.			

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

3.0 Gegeben ist die Funktion

$$g: x \mapsto 3 - e^{-2x}, \quad D_g = \mathbb{R}$$

Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

- 2 **3.1** Geben Sie die Gleichung der waagrechten Asymptote von G_g sowie die Koordinaten des Schnittpunkts von G_g mit der y -Achse an.
- 2 **3.2** Berechnen Sie die exakte Nullstelle der Funktion g .
- 3 **3.3** Bestimmen Sie einen Term derjenigen Stammfunktion G von g , deren Graph durch den Koordinatenursprung verläuft.

22

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0** Vor der Pollensaison bietet eine Apotheke einen Allergie-Schnelltest an. Von den getesteten Personen haben 20 % eine Pollenallergie (A). Bei 90 % der Personen mit Allergie zeigt der Test ein positives Ergebnis (T), aber auch bei 5 % der Personen ohne Allergie.
- 1.1** Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel für die Ereignisse A und T .
- 1.2** Eine Kundin folgert: „Der Test erkennt 90 % der Allergien. Wenn mein Test positiv ist, habe ich also mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % eine Pollenallergie.“ Begründen Sie, ob diese Folgerung zutrifft.
- 2** Entscheiden Sie jeweils, ob es sich um eine Bernoulli-Kette handelt. Geben Sie gegebenenfalls die Länge n und die Trefferwahrscheinlichkeit p an.
- a) Ein Laplace-Tetraeder mit den Augenzahlen 1 bis 4 wird achtmal geworfen. Treffer: Die Augenzahl ist 4.
- b) Aus einem Kartenspiel mit 32 Karten, darunter vier Asse, werden nacheinander drei Karten ohne Zurücklegen gezogen. Treffer: Die gezogene Karte ist ein Ass.
- 3.0** Bei einem Spiel auf dem Schulfest werden zwei Laplace-Tetraeder mit den Augenzahlen 1 bis 4 gleichzeitig geworfen. Zeigen beide dieselbe Augenzahl (Pasch), werden 3 € ausbezahlt; beträgt die Augensumme 5, wird 1 € ausbezahlt. In allen anderen Fällen gibt es keine Auszahlung.
- 3.1** Bestimmen Sie den Einsatz, bei dem das Spiel fair ist.
- 3.2** Die Auszahlung für einen Pasch wird auf 2 € gesenkt, die für die Augensumme 5 auf 2 € erhöht; der Einsatz bleibt wie in 3.1. Entscheiden Sie ohne Rechnung, ob das Spiel dann fair bleibt, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

12

Musterprüfung Nr. 001 (Nachtermin) zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 2: mit Hilfsmitteln

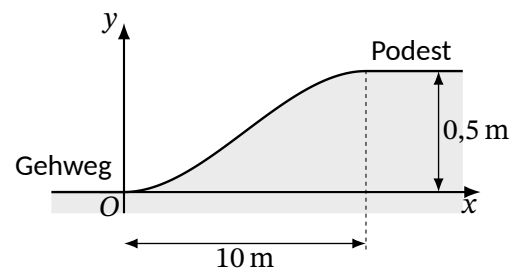
Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Stochastik* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

- 1.0** Vor dem Eingang einer Bücherei soll eine Rampe für Rollstühle den Gehweg mit dem 0,5 m höher gelegenen Eingangspodest verbinden (siehe nicht maßstäbliche Skizze). In waagrechter Richtung ist die Rampe 10 m lang. Das Profil der Rampe wird im Koordinatensystem der Skizze durch den Graphen G_f der Funktion f mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, und der Definitionsmenge $D_f = [0; 10]$ beschrieben. Dabei geben x und $f(x)$ Längen in Metern an.



Damit Rollstühle ohne Stoß auf die Rampe und auf das Podest gelangen, gehen Gehweg und Podest knickfrei in die Rampe über. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 1.1** Bestimmen Sie die Werte der Parameter a , b , c und d . Begründen Sie dabei, warum für einen knickfreien Übergang $f'(0) = 0$ und $f'(10) = 0$ gelten muss.
[Mögliches Ergebnis: $f(x) = -0,001x^3 + 0,015x^2$]
- 1.2** Ermitteln Sie die Stelle, an der die Rampe am steilsten ist, und geben Sie die Steigung an dieser Stelle in Prozent an.
- 1.3** Nach der Norm für barrierefreies Bauen darf eine Rampe an keiner Stelle mehr als 6 % Steigung haben. Die Architektin argumentiert: „Zwei Meter nach dem Anfang und zwei Meter vor dem Podest beträgt die Steigung weniger als 6 %, dazwischen ändert sie sich kaum. Damit ist die Norm eingehalten.“
Untersuchen Sie, ob diese Argumentation zutrifft.
- 1.4** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_f in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab: x -Achse 1 m $\hat{=}$ 1 cm; y -Achse 0,1 m $\hat{=}$ 1 cm
- 1.5** Die Rampe ist 1,2 m breit und wird als massiver Betonkörper gegossen. Ihr Querschnitt ist das Flächenstück zwischen G_f , der x -Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = 10$.
Berechnen Sie, wie viele Kubikmeter Beton benötigt werden.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 2.0** In der Neujahrsnacht steigt durch das Feuerwerk die Feinstaubbelastung in einer Innenstadt stark an. Modellhaft wird sie durch die Funktion P mit

$$P(t) = 20 + 100t \cdot e^{-0,4t}, \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

beschrieben. Dabei ist t die Zeit in Stunden seit Mitternacht und $P(t)$ die Feinstaubkonzentration in $\mu\text{g}/\text{m}^3$ (Mikrogramm pro Kubikmeter Luft). Ab $80 \mu\text{g}/\text{m}^3$ rät die Stadt Menschen mit Asthma, im Haus zu bleiben.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.

- 3 2.1** Berechnen Sie $P(0)$ und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von P für $t \rightarrow \infty$. Interpretieren Sie beide Ergebnisse im Sachzusammenhang.

- 7 2.2** Ermitteln Sie rechnerisch die größte Feinstaubkonzentration nach diesem Modell.
[Mögliches Teilergebnis: $\dot{P}(t) = (100 - 40t) \cdot e^{-0,4t}$]

- 5 2.3** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen von P für $0 \leq t \leq 12$ in ein Koordinatensystem.
Maßstab: $1 \text{ h} \hat{=} 1 \text{ cm}$; $20 \mu\text{g}/\text{m}^3 \hat{=} 1 \text{ cm}$
Entnehmen Sie Ihrer Zeichnung, wie lange die Empfehlung für Menschen mit Asthma ungefähr gilt.

- 4 2.4** Der Graph von P hat an der Stelle $t = 5$ einen Wendepunkt (Nachweis nicht erforderlich).
Berechnen Sie $\dot{P}(5)$ und interpretieren Sie den Wert im Sachzusammenhang.

- 3 2.5** Ein Anwohner meint: „Nach dem Modell ist die Luft am Neujahrsmittag wieder genau so sauber wie vor dem Feuerwerk.“
Erläutern Sie, inwiefern diese Aussage zutrifft, und nennen Sie eine Grenze des Modells.

43

BE

- 1.0** Nach dem Duschen ist die Luft im Badezimmer sehr feucht; ein digitales Hygrometer zeigt die relative Luftfeuchte in Prozent an. Damit sich kein Schimmel bildet, sollte sie unter 60 % sinken; im übrigen Wohnbereich beträgt sie etwa 50 %. Direkt nach dem Duschen zeigt das Hygrometer 95 %. Das Fenster wird gekippt, die Tür bleibt geschlossen. Das Hygrometer speichert folgende Messwerte:

Zeit seit dem Kippen des Fensters in min	0	5	30
relative Luftfeuchte in %	95	65	58

Die Luftfeuchte wird modellhaft durch die Funktion L mit

$$L(t) = 50 + a \cdot e^{-k \cdot t}, \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

und $a, k \in \mathbb{R}^+$ beschrieben. Dabei ist t die Zeit in Minuten seit dem Kippen des Fensters und $L(t)$ die relative Luftfeuchte in Prozent.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 1.1** Bestimmen Sie mithilfe der Messwerte für $t = 0$ und $t = 5$ die Werte der Parameter a und k . Runden Sie k auf zwei Nachkommastellen.

Im Folgenden gilt:

$$L(t) = 50 + 45 \cdot e^{-0,22 \cdot t}$$

- 1.2** Berechnen Sie, nach welcher Zeit die Luftfeuchte nach diesem Modell auf 60 % gesunken ist. Runden Sie auf eine Nachkommastelle.
- 1.3** Berechnen Sie die momentane Änderungsrate der Luftfeuchte fünf Minuten nach dem Einschalten des Lüfters und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.
- 1.4** Wird das Fenster ganz geöffnet, verdoppelt sich der Wert von k ; alle anderen Werte bleiben gleich.
Entscheiden Sie ohne Rechnung, wie sich der Graph von L dadurch verändert, und geben Sie anschließend an, nach welcher Zeit dann 60 % erreicht werden.
- 1.5** Untersuchen Sie mithilfe des Messwerts nach 30 Minuten, wie gut das Modell die Messung beschreibt, und erläutern Sie eine mögliche Ursache für die Abweichung.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

2.0 Gegeben ist die Funktion

$$h : x \mapsto (x^2 - 2x - 2) \cdot e^{-x}, \quad D_h = \mathbb{R}$$

Der Graph von h in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_h bezeichnet.

3 2.1 Ermitteln Sie die Nullstellen von h sowie das Verhalten der Funktionswerte von h für $x \rightarrow -\infty$ und für $x \rightarrow +\infty$.

6 2.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_h .
[Mögliches Teilergebnis: $h'(x) = -(x^2 - 4x) \cdot e^{-x}$]

4 2.3 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_h für $-1 \leq x \leq 6$ in ein Koordinatensystem.
Maßstab für beide Achsen: 1 LE $\hat{=}$ 1 cm

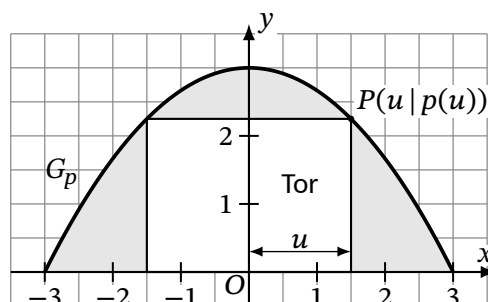
2 2.4 Zeigen Sie, dass die Funktion H mit

$$H(x) = -(x^2 - 2) \cdot e^{-x}, \quad D_H = \mathbb{R}$$

eine Stammfunktion von h ist.

3.0 Eine Lagerhalle hat einen parabelförmigen Querschnitt. Ihre Giebelseite wird im Koordinatensystem der Skizze vom Graphen G_p der Funktion p mit $p(x) = 3 - \frac{1}{3}x^2$ und $D_p = [-3; 3]$ sowie von der x -Achse begrenzt. Dabei entspricht eine Längeneinheit 1 m.

In die Giebelseite wird ein rechteckiges Tor eingesetzt, das symmetrisch zur y -Achse auf dem Boden steht und dessen obere Ecken auf dem Bogen liegen. Die halbe Breite des Tors wird mit u bezeichnet.



3 3.1 Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt des Tors gilt: $A(u) = 6u - \frac{2}{3}u^3$. Geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für A an.

5 3.2 Ermitteln Sie die Breite und die Höhe des Tors mit dem größtmöglichen Flächeninhalt und geben Sie diesen Flächeninhalt an. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

4 3.3 Damit ein Traktor mit Kabine hindurchfahren kann, soll das Tor mindestens 2,25 m hoch sein.
Ermitteln Sie unter dieser Bedingung die Breite des Tors mit dem größtmöglichen Flächeninhalt.

43

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0** In einer Kletterhalle wird entweder ohne Seil an niedrigen Wänden gebouldert (B) oder an hohen Wänden mit Seil geklettert. 70 % der Besuche sind Boulderbesuche. Von den Boulderern besitzen 40 % eine Jahreskarte (J), von den Seilkletterern 60 %. Unabhängig von Kletterart und Jahreskarte leihen sich 20 % aller Besucher Kletterschuhe (L). Ein zufällig ausgewählter Besuch wird hinsichtlich Kletterart, Jahreskarte und Leihschuhen betrachtet und als Zufallsexperiment aufgefasst.
- 5 **1.1** Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse.
[Teilergebnis: $P(\{(B; J; L)\}) = 0,056$]
- 3 **1.2** Gegeben ist das Ereignis
 E_1 : „Der Besucher besitzt eine Jahreskarte oder leiht sich Kletterschuhe.“
Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und berechnen Sie $P(E_1)$ mithilfe des Gegenereignisses.
- 3 **1.3** Berechnen Sie den Anteil der Boulderbesuche unter allen Besuchen mit Jahreskarte und interpretieren Sie den Wert im Vergleich zu 70 %.
- 2.0** Die Halle verleiht 15 Paar Kletterschuhe. Jedes Paar ist unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % so abgenutzt, dass es neu bescholt werden muss.
- 3 **2.1** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
 E_2 : „Genau zwei Paare müssen neu bescholt werden.“
 E_3 : „Mindestens 13 Paare sind noch in Ordnung.“
- 3 **2.2** Eine Mitarbeiterin prüft nacheinander zufällig ausgewählte Leihschuhe aus dem gesamten Bestand der Halle. Ermitteln Sie, wie viele Paare sie mindestens prüfen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens ein abgenutztes Paar zu finden.
- 3.0** Nach dem Bau einer Kinderkletterwand vermutet der Betreiber, dass der Anteil der Kinder unter den Besuchern über 30 % gestiegen ist (Gegenhypothese). Er möchte nur dann einen zusätzlichen Trainer einstellen, wenn ein Test diese Vermutung auf einem Signifikanzniveau von 5 % stützt. Dazu werden 100 zufällig ausgewählte Besucher erfasst.
- 4 **3.1** Entwickeln Sie einen geeigneten Hypothesentest und geben Sie an, welche Entscheidung der Test nahelegt, wenn 37 der 100 Besucher Kinder sind.
- 2 **3.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, wenn der Anteil der Kinder tatsächlich 40 % beträgt.

23

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 4 **1.0** Ein Feldroboter erkennt Unkraut mit einer KI-gestützten Kamera und entfernt es. In einem Gemüsefeld sind 30 % aller Pflanzen Unkraut (U). Die Kamera markiert 90 % der Unkrautpflanzen zum Entfernen (M), aber auch 10 % der Gemüsepflanzen.
- 4 **1.1** Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel für die Ereignisse U und M .
- 4 **1.2** Der Hersteller wirbt: „Unser Roboter erkennt 90 % des Unkrauts. Eine markierte Pflanze ist also mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % Unkraut.“
Untersuchen Sie, ob diese Folgerung zutrifft, und erläutern Sie den Denkfehler.
- 3 **1.3** Untersuchen Sie, ob die Ereignisse U und M stochastisch unabhängig sind, und deuten Sie das Ergebnis im Hinblick auf die Qualität der Kamera.
- 5 **2** Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Unkrautpflanzen unter 50 zufällig ausgewählten Pflanzen des Feldes an.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert von X innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt. Begründen Sie dabei, dass X als binomialverteilt angesehen werden kann.
- 3.0** Für jede Pflanze entstehen Kosten K (in Euro): Bleibt eine Unkrautpflanze stehen, muss sie von Hand gejätet werden (0,20 €); wird eine Gemüsepflanze fälschlich entfernt, fehlt sie bei der Ernte (0,50 €). In allen anderen Fällen entstehen keine Kosten.
- 4 **3.1** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von K sowie den Erwartungswert von K . Interpretieren Sie den Erwartungswert für ein Feld mit 10 000 Pflanzen.
- 3 **3.2** Mit einer empfindlicheren Einstellung B markiert die Kamera 99 % der Unkrautpflanzen, aber 20 % der Gemüsepflanzen.
Entscheiden Sie mithilfe des Erwartungswerts der Kosten, welche der beiden Einstellungen für den Betrieb günstiger ist.

23