

- Lösungshinweise -

Musterprüfung Nr. 001 zum Fachabitur
 zum Erwerb der Fachhochschulreife
 an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Notenschlüssel:

Note	Punkte	Bewertungseinheiten	
		von	bis
+	15	100	96
1	14	95	91
–	13	90	86
+	12	85	81
2	11	80	76
–	10	75	71
+	9	70	66
3	8	65	61
–	7	60	56
+	6	55	51
4	5	50	46
–	4	45	41
+	3	40	34
5	2	33	27
–	1	26	20
6	0	19	0

Ergibt die Gesamtsumme der Bewertungseinheiten n,5,
 so wird einmalig zugunsten des Prüflings aufgerundet.

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 1 - A -

- 3 **1.1** $f(x) = x(x^2 - 6x + 9) = x(x - 3)^2$
 $x_1 = 0$ (einfache Nullstelle); $x_{2,3} = 3$ (doppelte Nullstelle)
 Leitkoeffizient positiv, Grad 3: $f(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow -\infty$; $f(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow +\infty$
- 4 **1.2** $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x_4 = 1$; $x_5 = 3$
 Vorzeichen von f' : + für $x < 1$, – für $1 < x < 3$, + für $x > 3$
 $\Rightarrow$ relativer Hochpunkt $H(1 | 4)$, relativer Tiefpunkt $T(3 | 0)$
- 3 **1.3** Parallel zur Geraden heißt gleiche Steigung: $f'(x) = -3$
 $3x^2 - 12x + 9 = -3 \iff 3x^2 - 12x + 12 = 0 \iff x^2 - 4x + 4 = 0 \iff (x - 2)^2 = 0 \iff x = 2$
 Die Gleichung hat nur die (doppelte) Lösung $x = 2$, also gibt es genau eine solche Stelle; dort liegt der Punkt $(2 | 2)$ von G_f .

5 2

Aussage	w	f	n. e.
$f(2) = 0$	x		
Die Funktionswerte von f wechseln an der Stelle $x = -1$ ihr Vorzeichen.		x	
Der Graph von f besitzt im Intervall $] -1; 2[$ einen Tiefpunkt.	x		
$\int_{-2}^0 f(x) dx > 0$		x	
Der Graph G_F schneidet die x -Achse genau zweimal.			x

- 2 **3.1** Für $x \rightarrow +\infty$ gilt $e^{-x} \rightarrow 0$, also $g(x) \rightarrow 4$: waagrechte Asymptote $y = 4$
 $g(0) = 4 - 2 = 2$: Schnittpunkt mit der y -Achse $S(0 | 2)$
- 2 **3.2** $g(x) = 0 \Rightarrow 2e^{-x} = 4 \Rightarrow e^{-x} = 2 \Rightarrow -x = \ln(2) \Rightarrow x = -\ln(2)$
- 3 **3.3** $G(x) = 4x + 2e^{-x} + C$ (Kontrolle: $G'(x) = 4 - 2e^{-x} = g(x)$)
 $G(0) = 0 \Rightarrow 0 + 2 + C = 0 \Rightarrow C = -2$; $G(x) = 4x + 2e^{-x} - 2$

22

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 1 - S -

3 1.1

	R	$\bar{R}$	Σ
A	0,24	0,07	0,31
$\bar{A}$	0,06	0,63	0,69
Σ	0,30	0,70	1

z. B. $P(R \cap A) = 0,3 \cdot 0,8 = 0,24$; $P(\bar{R} \cap A) = 0,7 \cdot 0,1 = 0,07$

3 1.2 Die 80 % sind $P_R(A)$ (Anteil der Ankündigungen unter den Regentagen). Gefragt ist aber $P_A(R)$:

$$P_A(R) = \frac{P(A \cap R)}{P(A)} = \frac{0,24}{0,31} < \frac{0,24}{0,30} = 0,8 \quad (\text{genauer: } \approx 0,77)$$

Die Folgerung trifft nicht zu: Ereignis und Bedingung wurden vertauscht. Weil die App auch an Tagen ohne Regen Regen ankündigt, regnet es nach einer Regenankündigung nur in etwa 77 % der Fälle.

Bewertung: volle BE für die richtige Zuordnung beider bedingter Wahrscheinlichkeiten, eine schlüssige Abschätzung oder Rechnung und die Benennung des Denkfehlers; ohne Begründung, warum $P_A(R) \neq 0,8$: höchstens 1 BE.

2 2 a) Bernoulli-Kette: unabhängige Würfe mit gleicher Trefferwahrscheinlichkeit, $n = 10$,
 $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

b) keine Bernoulli-Kette: Ohne Zurücklegen ändert sich die Trefferwahrscheinlichkeit von Zug zu Zug (z. B. erst $\frac{3}{9}$, nach einem roten Zug nur noch $\frac{2}{8}$).

2 3.1 Laplace-Experiment mit 36 gleich wahrscheinlichen Ergebnissen: Pasch in 6 Fällen, Augensumme 7 in 6 Fällen (kein Pasch).

$$E(\text{Auszahlung}) = 4 \text{ €} \cdot \frac{6}{36} + 2 \text{ €} \cdot \frac{6}{36} = 1 \text{ €} \quad \text{Bei einem Einsatz von 1 € ist das Spiel fair.}$$

2 3.2 Die Wahrscheinlichkeiten bleiben gleich, eine Auszahlung wird größer und keine kleiner. Damit ist der Erwartungswert der Auszahlung größer als der Einsatz von 1 €: Das Spiel ist für den Spieler günstig.

Bewertung: eine Rechnung ($\frac{7}{6} \text{ €} > 1 \text{ €}$) ist nicht verlangt, wird aber ebenfalls voll bewertet.

12

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I -

- 6 **1.1** Knickfrei heißt: Der Graph geht ohne Richtungsänderung in Boden und Plateau über; beide sind waagrecht, also muss die Steigung von G_f an den Enden null sein: $f'(0) = 0$, $f'(4) = 0$.

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$f'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$f(4) = 2 \Rightarrow 64a + 16b = 2 \quad f'(4) = 0 \Rightarrow 48a + 8b = 0 \Rightarrow b = -6a$$

$$\Rightarrow 64a - 96a = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{16}; b = \frac{3}{8}; \quad f(x) = -\frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{8}x^2$$

- 4 **1.2** $f'(x) = -\frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{4}x$; $f''(x) = -\frac{3}{8}x + \frac{3}{4}$; $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 2$ (Vorzeichenwechsel von + nach -)

Wendestelle $x = 2$: Dort ist die Steigung maximal (an den Rändern ist sie 0).

$$f'(2) = -\frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

An der steilsten Stelle $x = 2$ beträgt die Steigung 75 %.

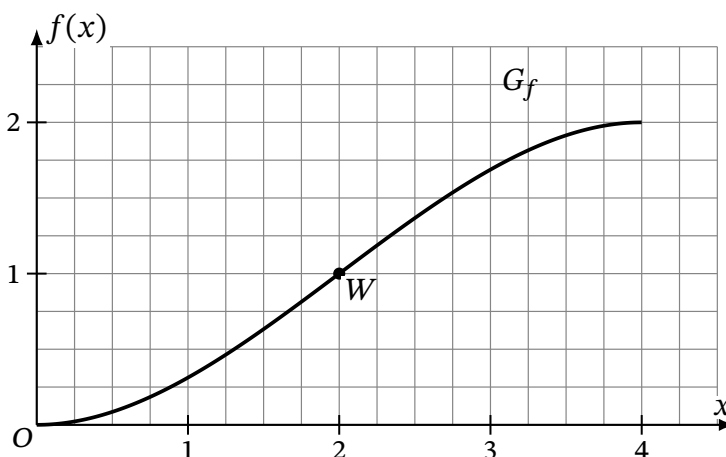
- 3 **1.3** $f'(x) = -\frac{3}{16}x^2 + \frac{3}{4}x$, $f'(1) = -\frac{3}{16} + \frac{12}{16} = \frac{9}{16} = 0,5625 = 56,25\%$

Die Hälfte der größten Steigung wäre 37,5 %. Die Behauptung trifft nicht zu: Die Steigung nimmt nicht gleichmäßig zu, f' ist eine quadratische Funktion (f'' ist nicht konstant); schon nach einem Meter ist die Rampe deutlich steiler als die Hälfte des Maximums.

Bewertung: 1 BE $f'(1)$, 1 BE Vergleich mit 37,5 %, 1 BE Begründung (Steigung wächst nicht linear); nur „falsch“: 0 BE.

- 4 **1.4**

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	$\approx 0,31$	1	$\approx 1,69$	2



- 4 **1.5** $A = \int_0^4 f(x) dx = \left[-\frac{1}{64}x^4 + \frac{1}{8}x^3 \right]_0^4 = -4 + 8 = 4$

$$\text{Zwei Seitenflächen: } 2 \cdot 4 \text{ m}^2 = 8 \text{ m}^2; \quad 8 : 5 = 1,6$$

Es werden mindestens 1,6 Liter Farbe benötigt.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I - (Fortsetzung)

3 2.1 $Q(0) = 2$: Vor dem Gewitter (Beginn) fließen $2 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ ab (Grundabfluss).

$t \rightarrow \infty$: $3t \cdot e^{-0,5t} \rightarrow 0$ (die e-Funktion „überwiegt“), also $Q(t) \rightarrow 2$.

Langfristig geht der Abfluss wieder auf den Grundabfluss von $2 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ zurück.

7 2.2 $\dot{Q}(t) = 3 \cdot e^{-0,5t} + 3t \cdot e^{-0,5t} \cdot (-0,5) = (3 - 1,5t) \cdot e^{-0,5t}$

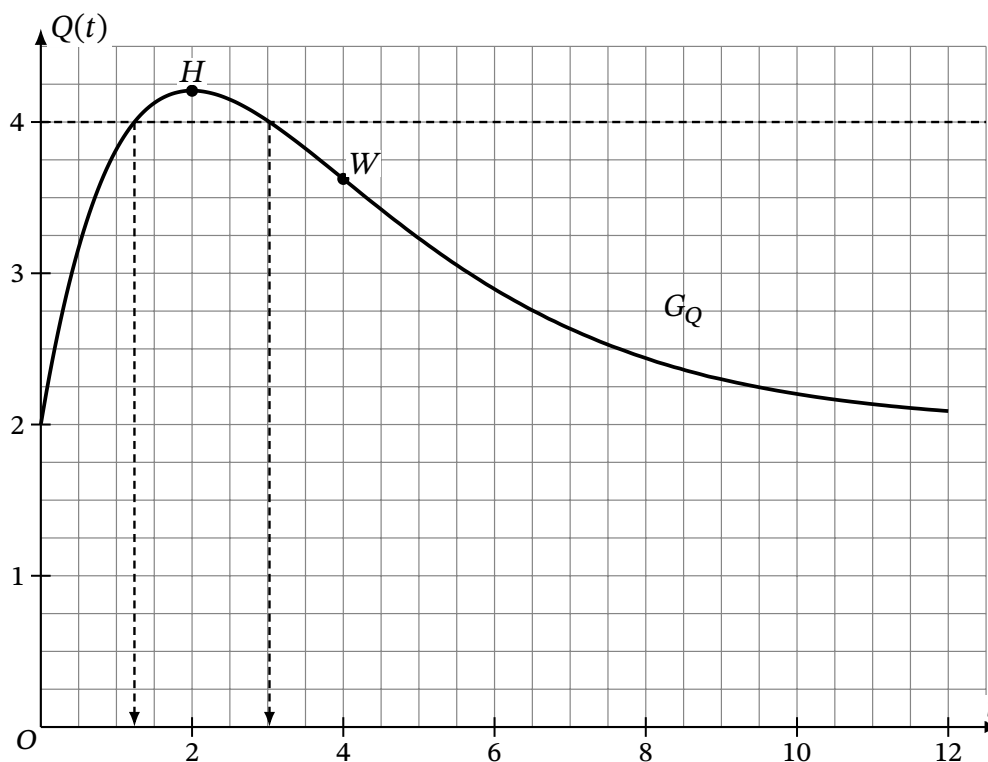
$\dot{Q}(t) = 0 \Rightarrow 3 - 1,5t = 0 \Rightarrow t = 2$ (da $e^{-0,5t} > 0$)

Für $0 \leq t < 2$ ist $\dot{Q}(t) > 0$, für $t > 2$ ist $\dot{Q}(t) < 0$: einziger Monotoniewechsel, also absolutes Maximum.

$Q(2) = 2 + 6e^{-1} \approx 4,21$ Der größte Abfluss beträgt etwa $4,21 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ (zwei Stunden nach Beginn des Gewitters).

5 2.3

t	0	1	2	4	6	8	12
$Q(t)$	2	3,82	4,21	3,62	2,90	2,44	2,09



Abgelesen: $Q(t) \geq 4$ etwa von $t \approx 1,2$ bis $t \approx 3,0$. Die Warnung besteht ungefähr 1,8 Stunden (Toleranz $\pm 0,2$ h).

Fortsetzung siehe nächste Seite

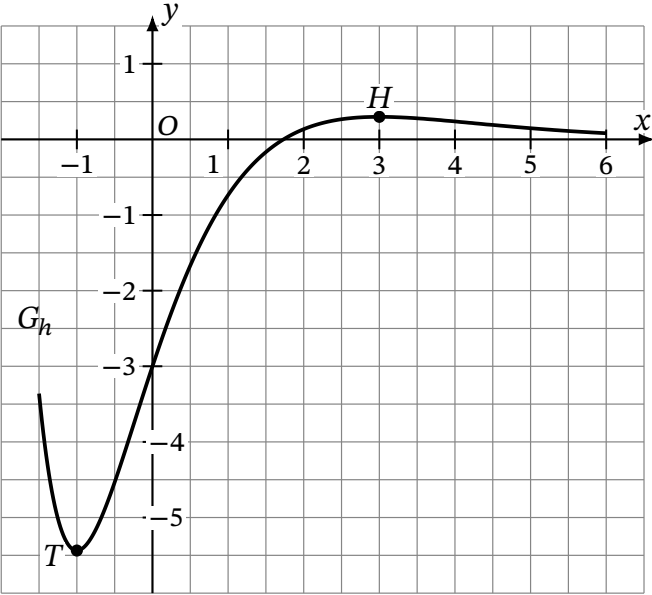
BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I - (Fortsetzung)	
4	2.4	$\dot{Q}(4) = (3 - 6) \cdot e^{-2} = -3e^{-2} \approx -0,41$ Vier Stunden nach Beginn des Gewitters nimmt der Abfluss am stärksten ab: um etwa $0,41 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ pro Stunde.
3	2.5	$Q(12) = 2 + 36e^{-6} \approx 2,09$: Der Abfluss liegt nur noch knapp über dem Grundabfluss von 2, ist aber nach dem Modell nicht genau so groß wie vorher – das Modell nähert sich dem Wert 2 nur an. Die Aussage trifft also nur näherungsweise zu. Grenzen des Modells (eine genügt): erneuter Regen wird nicht erfasst; der Grundabfluss ändert sich in Wirklichkeit (Trockenheit, Schneeschmelze); der Verlauf einer echten Hochwasserwelle hängt von Regenmenge und Gelände ab. <i>Bewertung:</i> 1 BE für $Q(12)$ mit Deutung, 2 BE für eine sachlich begründete Grenze des Modells.
43		

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A II -	
4	1.1	$C(0) = 2000 \Rightarrow 400 + a = 2000 \Rightarrow a = 1600$ $C(5) = 1000 \Rightarrow 1600 \cdot e^{-5k} = 600 \Rightarrow e^{-5k} = \frac{3}{8} \Rightarrow k = -\frac{1}{5} \ln\left(\frac{3}{8}\right) \approx 0,20$
3	1.2	$400 + 1600 \cdot e^{-0,2t} = 600 \Rightarrow e^{-0,2t} = \frac{1}{8} \Rightarrow t = \frac{\ln 8}{0,2} \approx 10,4$ Nach etwa 10,4 Minuten ist die Konzentration auf 600 ppm gesunken.
3	1.3	$C'(t) = 1600 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) e^{-\frac{t}{5}} = -320 e^{-\frac{t}{5}}, C'(5) = -320 e^{-1} \approx -118$ Fünf Minuten nach dem Öffnen nimmt die Konzentration nach dem Modell momentan um etwa 118 ppm pro Minute ab.
3	1.4	Bei doppeltem k fällt der Graph schneller ab; er beginnt weiterhin bei 2000 ppm und nähert sich weiterhin 400 ppm an (gleicher Startwert, gleiche Asymptote). Da k und t nur als Produkt $k \cdot t$ auftreten, halbiert sich jede Zeitspanne: 600 ppm werden nach etwa 5,2 Minuten erreicht. <i>Bewertung:</i> 1 BE je Merkmal (schnellerer Abfall, gleicher Start/gleiche Asymptote), 1 BE für die Zeit; auch eine neue Rechnung mit $k = 0,4$ ist voll zu bewerten.
3	1.5	$C(30) = 400 + 1600 e^{-6} \approx 404$, gemessen wurden 520 ppm: Das Modell unterschätzt die Konzentration nach längerer Zeit deutlich. Ursache: Die Klasse bleibt im Raum und atmet weiter CO_2 aus; das Modell berücksichtigt nur den Luftaustausch und nicht diese Quelle, deshalb sinkt die Konzentration in Wirklichkeit nicht bis 400 ppm. (Auch: Wind und Temperaturunterschied ändern den Luftaustausch, Messungenauigkeit der Ampel.)

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

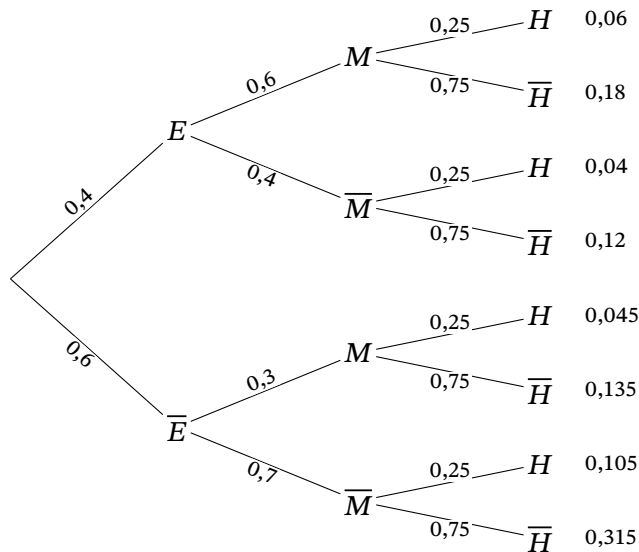
- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A II - (Fortsetzung)

- 3 **2.1** $h(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3 = 0$ (da $e^{-x} > 0$) $\Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$
 $x \rightarrow +\infty$: $h(x) \rightarrow 0$ (e-Funktion überwiegt); $x \rightarrow -\infty$: $x^2 - 3 \rightarrow \infty$ und $e^{-x} \rightarrow \infty$,
 also $h(x) \rightarrow +\infty$
- 6 **2.2** $h'(x) = 2x \cdot e^{-x} + (x^2 - 3) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = -(x^2 - 2x - 3) \cdot e^{-x} = -(x - 3)(x + 1) \cdot e^{-x}$
 $h'(x) = 0 \Rightarrow x_3 = -1$; $x_4 = 3$
 Vorzeichen von h' : – für $x < -1$, + für $-1 < x < 3$, – für $x > 3$
 $\Rightarrow$ relativer Tiefpunkt $T(-1 | -2e) \approx T(-1 | -5,44)$;
 relativer Hochpunkt $H(3 | 6e^{-3}) \approx H(3 | 0,30)$
- 4 **2.3**
- | x | $h(x)$ |
|------------|--------|
| -1,5 | -3,36 |
| -1 | -5,44 |
| 0 | -3 |
| 1 | -0,74 |
| $\sqrt{3}$ | 0 |
| 3 | 0,30 |
| 4 | 0,24 |
| 6 | 0,08 |
- 
- 2 **2.4** $H'(x) = -(2x + 2) \cdot e^{-x} - (x^2 + 2x - 1) \cdot e^{-x} \cdot (-1)$
 $= (-2x - 2 + x^2 + 2x - 1) \cdot e^{-x} = (x^2 - 3) \cdot e^{-x} = h(x)$
- 3 **3.1** Breite der Tür $2u$, Höhe $p(u) = 2 - \frac{1}{2}u^2$: $A(u) = 2u \cdot \left(2 - \frac{1}{2}u^2\right) = 4u - u^3$
 Sinnvoll: $D_A =]0; 2[$ (für $u = 0$ und $u = 2$ hätte die Tür keine Fläche).
- 5 **3.2** $A'(u) = 4 - 3u^2 = 0 \Rightarrow u = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,15$ ($u = -\frac{2}{\sqrt{3}} \notin D_A$)
 A' wechselt dort das Vorzeichen von + nach -: einziger Monotoniewechsel in D_A , also
 absolutes Maximum.
 Breite $2u \approx 2,31$ m; Höhe $p(u) = 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \approx 1,33$ m; $A_{\max} = A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \approx 3,08 \text{ m}^2$
- 4 **3.3** $p(u) \geq 1,5 \Rightarrow 2 - \frac{1}{2}u^2 \geq 1,5 \Rightarrow u^2 \leq 1 \Rightarrow 0 < u \leq 1$
 Auf $]0; 1]$ ist $A'(u) = 4 - 3u^2 > 0$ (da $u^2 \leq 1 < \frac{4}{3}$), A ist also streng monoton steigend.
 Das Maximum liegt am Rand: $u = 1$.
 Breite 2 m (Höhe 1,50 m, Flächeninhalt $A = 2 \cdot 1,5 = 3 \text{ m}^2$).
 Bewertung: Das Randmaximum muss begründet werden (Monotonie oder Vergleich mit dem
 lokalen Maximum außerhalb des neuen Definitionsbereichs); nur Einsetzen von $u = 1$ ohne
 Begründung: höchstens 2 BE.

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S I -

5 1.1 Mit Baumdiagramm (E : E-Bike, M : Monatsabo, H : Helm):



ω	$(E; M; H)$	$(E; M; \bar{H})$	$(E; \bar{M}; H)$	$(E; \bar{M}; \bar{H})$
$P(\{\omega\})$	0,06	0,18	0,04	0,12

ω	$(\bar{E}; M; H)$	$(\bar{E}; M; \bar{H})$	$(\bar{E}; \bar{M}; H)$	$(\bar{E}; \bar{M}; \bar{H})$
$P(\{\omega\})$	0,045	0,135	0,105	0,315

3 1.2 $E_1 = \{(E; M; H); (E; M; \bar{H}); (E; \bar{M}; H); (\bar{E}; M; H); (\bar{E}; M; \bar{H}); (\bar{E}; \bar{M}; H)\}$

$\bar{E}_1 = \{(E; \bar{M}; \bar{H}); (\bar{E}; \bar{M}; \bar{H})\}$ (kein Abo und kein Helm)

$$P(E_1) = 1 - (0,12 + 0,315) = 0,565$$

3 1.3 $P(M) = 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,3 = 0,42$; $P_M(E) = \frac{P(E \cap M)}{P(M)} = \frac{0,24}{0,42} \approx 0,57$

Unter den Ausleihen mit Monatsabo betreffen etwa 57 % ein E-Bike – deutlich mehr als die 40 % unter allen Ausleihen: Abo-Kunden nutzen überdurchschnittlich oft E-Bikes.

3 2.1 X : Anzahl der defekten Räder; X ist binomialverteilt mit $n = 12$, $p = 0,15$.

$$P(E_2) = B(12; 0,15; 2) = \binom{12}{2} \cdot 0,15^2 \cdot 0,85^{10} \approx 0,29236$$

$$P(E_3) = P(X \leq 2) = \sum_{i=0}^2 B(12; 0,15; i) \approx 0,73582$$

3 2.2 $P(\text{„mindestens ein defektes Rad unter } n\text{“}) = 1 - 0,85^n \geq 0,99 \Rightarrow 0,85^n \leq 0,01$

$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,85} \approx 28,3 \text{ (Ungleichheitszeichen dreht sich, da } \ln 0,85 < 0)$$

Der Techniker muss mindestens 29 Räder prüfen.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S I - (Fortsetzung)

- 4 **3.1** Testgröße X : Anzahl der E-Bike-Ausleihen unter 100 Ausleihen; X ist binomialverteilt mit $n = 100$.

$$\left. \begin{array}{l} H_0 : p \leq 0,4; \quad A = \{0; \dots; k-1\} \\ H_1 : p > 0,4; \quad \bar{A} = \{k; \dots; 100\} \end{array} \right\} \Rightarrow P_{0,4}(X \geq k) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} B(100; 0,4; i) \leq 0,05$$

Aus dem Tafelwerk: $k = 49$ ($P_{0,4}(X \geq 49) \approx 0,042$; $P_{0,4}(X \geq 48) \approx 0,064$)

Ablehnungsbereich $\bar{A} = \{49; \dots; 100\}$. Da $47 \notin \bar{A}$, wird H_0 nicht abgelehnt: Die Vermutung des Anbieters wird durch die Stichprobe nicht gestützt; die Werbung bleibt.

- 2 **3.2** $P(\text{„Fehler 2. Art“}) = P_{0,5}(X \leq 48) = \sum_{i=0}^{48} B(100; 0,5; i) \approx 0,38218$

23

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S II -

4 1.1

	S	$\bar{S}$	Σ
M	0,19	0,032	0,222
$\bar{M}$	0,01	0,768	0,778
Σ	0,2	0,8	1

4 1.2 $P_M(S) = \frac{P(M \cap S)}{P(M)} = \frac{0,19}{0,222} \approx 0,856$

Die Folgerung trifft nicht zu: Nur etwa 85,6 % der markierten E-Mails sind Spam. Die 95 % sind $P_S(M)$, der Anteil der markierten unter den Spam-Mails; gefragt ist $P_M(S)$. Weil die erwünschten E-Mails viermal so häufig sind wie Spam, fallen auch die 4 % Fehlmarkierungen ins Gewicht.

Bewertung: 2 BE Rechnung, 1 BE Urteil, 1 BE für die Erläuterung (Vertauschen von Bedingung und Ereignis).

3 1.3 $P(S) \cdot P(M) = 0,2 \cdot 0,222 = 0,0444 \neq 0,19 = P(S \cap M) \Rightarrow$ stochastisch abhängig.

Deutung: Die Markierung hängt stark davon ab, ob eine E-Mail Spam ist – genau das soll ein guter Filter leisten. Bei Unabhängigkeit würde der Filter zufällig markieren.

5 2 Jede E-Mail ist unabhängig von den anderen mit derselben Wahrscheinlichkeit 0,2 Spam (Ziehen aus einer sehr großen Gesamtheit); X ist also binomialverteilt mit $n = 50$, $p = 0,2$.

$$\mu = n \cdot p = 10; \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{8} \approx 2,83$$

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(7,17 \leq X \leq 12,83) = P(8 \leq X \leq 12)$$

$$= \sum_{i=0}^{12} B(50; 0,2; i) - \sum_{i=0}^7 B(50; 0,2; i) \approx 0,62353$$

4 3.1

t in s	0	60	120
$P(T = t)$	0,958	0,01	0,032

$$(P(T = 60) = P(S \cap \bar{M}) = 0,01; P(T = 120) = P(\bar{S} \cap M) = 0,032)$$

$$E(T) = 60 \cdot 0,01 + 120 \cdot 0,032 = 4,44$$

Je E-Mail entstehen durchschnittlich 4,44 Sekunden Aufwand; bei 200 E-Mails täglich sind das im Mittel etwa 888 s $\approx$ 15 Minuten pro Tag.

3 3.2 Filter B: $P(T = 60) = 0,2 \cdot 0,01 = 0,002$; $P(T = 120) = 0,8 \cdot 0,1 = 0,08$

$$E_B(T) = 60 \cdot 0,002 + 120 \cdot 0,08 = 9,72$$

Filter A verursacht im Mittel weniger als halb so viel Zeitaufwand ($4,44 < 9,72$) und ist deshalb günstiger, obwohl Filter B mehr Spam erkennt: Die vielen fälschlich markierten erwünschten E-Mails kosten mehr Zeit.

23