

- Lösungshinweise -

Musterprüfung Nr. 002 (Nachtermin) zum Fachabitur
 zum Erwerb der Fachhochschulreife
 an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Notenschlüssel:

Note	Punkte	Bewertungseinheiten	
		von	bis
+	15	100	96
1	14	95	91
–	13	90	86
+	12	85	81
2	11	80	76
–	10	75	71
+	9	70	66
3	8	65	61
–	7	60	56
+	6	55	51
4	5	50	46
–	4	45	41
+	3	40	34
5	2	33	27
–	1	26	20
6	0	19	0

Ergibt die Gesamtsumme der Bewertungseinheiten **n,5**,
 so wird einmalig zugunsten des Prüflings aufgerundet.

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 1 - A -	
3	1.1 $f(x) = x^2(6 - x)$	$x_{1;2} = 0$ (doppelte Nullstelle); $x_3 = 6$ (einfache Nullstelle) Leitkoeffizient negativ, Grad 3: $f(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow -\infty$; $f(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow +\infty$
4	1.2 $f'(x) = -3x^2 + 12x = -3x(x - 4)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 4$	Vorzeichen von f' : $-$ für $x < 0$, $+$ für $0 < x < 4$, $-$ für $x > 4$; lokales Minimum $f(0) = 0$, lokales Maximum $f(4) = 32$ Randwerte: $f(-1) = 1 + 6 = 7$, $f(5) = -125 + 150 = 25$ Kleinster Funktionswert auf $[-1; 5]$: 0, größter: 32; da f^* stetig ist: $W_{f^*} = [0; 32]$
3	1.3 $f(2) = -8 + 24 = 16$: Wendepunkt $W(2 16)$; $f'(2) = -12 + 24 = 12$	Tangente: $y = 12(x - 2) + 16$, also $y = 12x - 8$
4	2	Graph III ist eine Gerade, gehört also zu einer Funktion vom Grad 1; die Ableitung g' hat einen um 1 kleineren Grad als g und G einen um 1 größeren Grad: III gehört zu g' . Graph II hat an den Stellen $x = -2$ und $x = 2$ Nullstellen mit Vorzeichenwechsel; genau dort hat Graph I einen Tiefpunkt bzw. Hochpunkt. Also ist II der Graph der Ableitung von I: II gehört zu g , I gehört zu G . Kontrolle: Der Hochpunkt von II liegt an der Stelle $x = 0$, dort hat III (die Ableitung von II) eine Nullstelle. <i>Bewertung:</i> 1 BE für g' mit Begründung, 2 BE für die Zuordnung von g und G mit Begründung über Extrem- und Nullstellen, 1 BE für fachsprachlich korrekte Begründung (Nullstelle von g als Stelle, Hoch- und Tiefpunkt des Graphen von G als Punkt).
2	3.1 $g(0) = 1 - 4 = -3$: Schnittpunkt mit der y -Achse $S_y(0 -3)$	$g(x) = 0 \Rightarrow e^{2x} = 4 \Rightarrow 2x = \ln(4) \Rightarrow x = \ln(2)$: Schnittpunkt mit der x -Achse $S_x(\ln(2) 0)$
3	3.2 $x \mapsto e^{2x}$: Stauchung des Graphen von $x \mapsto e^x$ in x -Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$;	$x \mapsto e^{2x} - 4$: Verschiebung um 4 in negative y -Richtung.
		<i>Bewertung:</i> 1 BE Stauchung mit Faktor, 1 BE Verschiebung mit Richtung, 1 BE vollständige, fachsprachlich korrekte Beschreibung.
3	3.3 Stammfunktion: $\frac{1}{2}e^{2x} - 4x$	$\int_0^{\ln(2)} g(x) dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} - 4x \right]_0^{\ln(2)} = \frac{1}{2} \cdot 4 - 4 \ln(2) - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - 4 \ln(2) \quad (\approx -1,27; \text{ das Flächenstück liegt unterhalb der } x\text{-Achse})$
22		

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 1 - S -	
2	1.1	Für den ersten Ring gibt es 10 Möglichkeiten, für den zweiten 9, für den dritten 8: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$
2	1.2	Insgesamt gibt es $10^3 = 1000$ gleich wahrscheinliche Codes (Laplace-Experiment); Gegenereignis „drei verschiedene Ziffern“: $P = 1 - \frac{720}{1000} = 0,28$
2	2.1	$P(G \cup K) = P(G) + P(K) - P(G \cap K) = 0,6 + 0,5 - 0,3 = 0,8$ $P(\overline{G} \cap \overline{K}) = 1 - P(G \cup K) = 0,2$
2	2.2	$P(G) \cdot P(K) = 0,6 \cdot 0,5 = 0,3 = P(G \cap K)$ Die Ereignisse G und K sind stochastisch unabhängig.
2	3.1	$P(X = 0) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0,1$; $P(X = 1) = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0,6$; $P(X = 2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0,3$ $E(X) = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,6 + 2 \cdot 0,3 = 1,2$
2	3.2	Die Behauptung trifft nicht zu. Mit Zurücklegen ist jede Socke mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{5}$ schwarz, im Mittel erhält man $2 \cdot \frac{3}{5}$ schwarze Socken. Ohne Zurücklegen ist jede einzelne Entnahme für sich betrachtet ebenfalls mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{5}$ schwarz (jede Socke kann mit gleicher Wahrscheinlichkeit an jeder Stelle gezogen werden); der Erwartungswert bleibt gleich. Es ändert sich nur die Verteilung. <i>Bewertung:</i> 1 BE für die richtige Entscheidung, 1 BE für eine schlüssige Begründung ohne Rechnung; eine Rechnung mit $B(2; 0,6)$ als Kontrolle ist zulässig.
12		

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I -

2 **1.1** $r(1) = 2 \cdot 1 \cdot (-4) \cdot (-9) = 72$

Um 7:00 Uhr nimmt die Anzahl der abgestellten Fahrräder momentan um 72 Fahrräder pro Stunde zu.

5 **1.2** $\dot{r}(t) = 6t^2 - 60t + 100$

$$\dot{r}(t) = 0 \Rightarrow t = 5 \pm \frac{5}{\sqrt{3}}, \text{ also } t_1 \approx 2,11 \in [0; 5] \quad (t_2 \approx 7,89 \notin [0; 5])$$

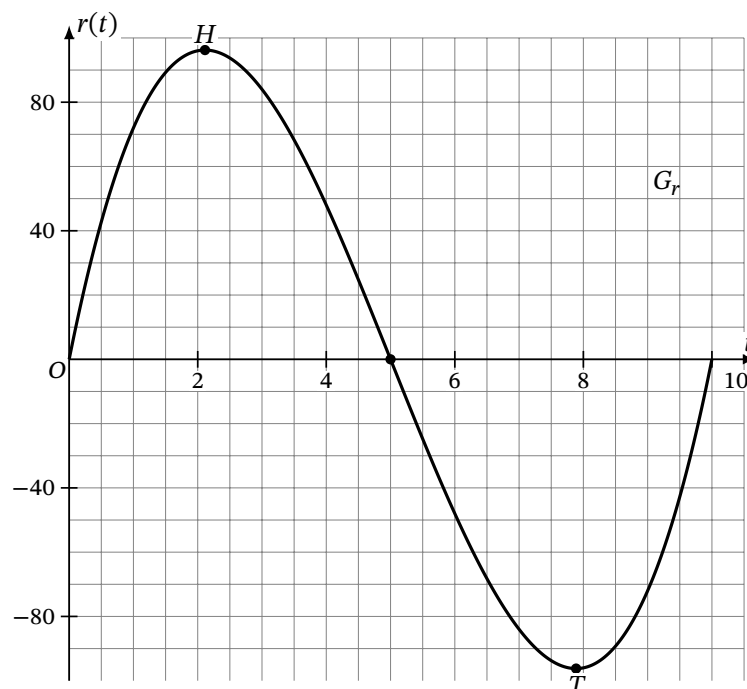
$\dot{r}$ wechselt bei t_1 das Vorzeichen von + nach -: lokales Maximum;

Randwerte $r(0) = r(5) = 0$, also absolutes Maximum auf $[0; 5]$.

$r(2,11) \approx 96,23$: Gegen 8:07 Uhr nimmt die Anzahl am stärksten zu, um etwa 96 Fahrräder pro Stunde.

4 **1.3**

t	0	1	2	3	5	7	8	9	10
$r(t)$	0	72	96	84	0	-84	-96	-72	0



4 **1.4** $\int_0^5 r(t) dt = \left[\frac{1}{2}t^4 - 10t^3 + 50t^2 \right]_0^5 = 312,5 - 1250 + 1250 = 312,5$

In den ersten fünf Stunden nimmt die Anzahl der abgestellten Fahrräder um 312,5 (etwa 313) zu.

3 **1.5** Für $0 < t < 5$ ist $r(t) > 0$, für $5 < t < 10$ ist $r(t) < 0$. Die größte Anzahl wird also um 11:00 Uhr ($t = 5$) erreicht:

$$60 + 312,5 = 372,5 < 400: \text{ Die Stellplätze reichen an diesem Tag aus.}$$

3 **1.6** Die Behauptung trifft nicht zu. $r(5) = 0$ bedeutet nur, dass sich die Anzahl um 11:00 Uhr momentan nicht ändert. Da r dort das Vorzeichen von + nach - wechselt, ist die Anzahl der abgestellten Fahrräder gerade dann am größten (etwa 372,5), nicht null.

Bewertung: volle BE nur bei Unterscheidung von Änderungsrate und Bestand und Angabe der tatsächlichen Anzahl mit Begründung über den Vorzeichenwechsel von r .

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I - (Fortsetzung)

- 3 **1.7** G_r ist punktsymmetrisch zum Punkt $(5 | 0)$ (z. B. aus der Zeichnung oder wegen $r(10 - t) = -r(t)$). Das Flächenstück zwischen G_r und der t -Achse über $[5; 10]$ ist daher genauso groß wie das über $[0; 5]$, liegt aber unterhalb der Achse.
- Die Abnahme von 11:00 bis 16:00 Uhr ist also genauso groß wie die Zunahme von 6:00 bis 11:00 Uhr; um 16:00 Uhr stehen wieder 60 Fahrräder im Parkhaus.

Bewertung: 1 BE Symmetrie, 1 BE Flächenbilanz null, 1 BE Antwort im Sachzusammenhang.

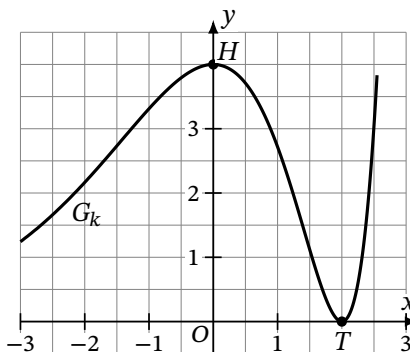
- 3 **2.1** $e^x > 0$ für alle x : $k(x) = 0 \iff (x - 2)^2 = 0 \iff x = 2$ (doppelte Nullstelle)
 $x \rightarrow -\infty$: $e^x \rightarrow 0$ „setzt sich durch“, $k(x) \rightarrow 0$; $x \rightarrow +\infty$: $k(x) \rightarrow +\infty$

- 6 **2.2** $k'(x) = 2(x - 2) \cdot e^x + (x - 2)^2 \cdot e^x = (x - 2)(2 + x - 2) \cdot e^x = x(x - 2) \cdot e^x$
 $k'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 2$
 Vorzeichen von k' : + für $x < 0$, – für $0 < x < 2$, + für $x > 2$
 $\Rightarrow$ Hochpunkt $H(0 | 4)$, Tiefpunkt $T(2 | 0)$

- 3 **2.3** $k(x) \geq 0$ für alle x , da $(x - 2)^2 \geq 0$ und $e^x > 0$; der Wert 0 wird im Tiefpunkt angenommen.
 Für $x \rightarrow +\infty$ wachsen die Funktionswerte über alle Grenzen; da k stetig ist, gilt $W_k = [0; \infty[$.

- 4 **2.4**

x	-3	-2	-1	0	1	2	2,5
$k(x)$	1,24	2,17	3,31	4	2,72	0	3,05

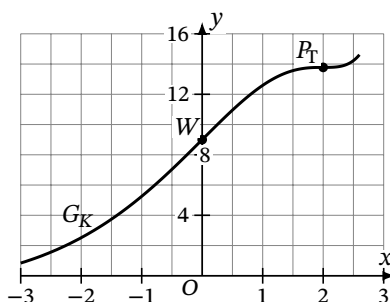


Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I - (Fortsetzung)

- 3 2.5 Wegen $K' = k \geq 0$ ist K monoton steigend. An der Stelle $x = 2$ ist $k(2) = 0$ ohne Vorzeichenwechsel: G_K hat dort einen Terrassenpunkt. An der Stelle $x = 0$ hat k ein Maximum: G_K hat dort einen Wendepunkt (größte Steigung links von 2). Für $x \rightarrow -\infty$ geht $k(x) \rightarrow 0$: G_K verläuft nach links zunehmend flacher.



Bewertung: 1 BE Monotonie, 1 BE Terrassenpunkt bei 2, 1 BE Wendepunkt bei 0; jede Verschiebung in y -Richtung ist richtig.

43

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A II -	
3	1.1 $A(3) = 45 \Rightarrow 20e^{3k} = 45 \Rightarrow e^{3k} = 2,25 \Rightarrow k = \frac{1}{3} \ln(2,25) \approx 0,27$	
4	1.2 Gerade durch $(0 20)$ und $(3 45)$: Steigung $\frac{45-20}{3} = \frac{25}{3}$, $L(t) = 20 + \frac{25}{3}t$ $L(6) = 70$; $A(6) = 20e^{1,62} \approx 101$ Abweichung vom Wert 95: linear 25, exponentiell 6 – das Modell A beschreibt den Wert deutlich besser.	
3	1.3 $20e^{0,27t} = 600 \Rightarrow e^{0,27t} = 30 \Rightarrow t = \frac{\ln(30)}{0,27} \approx 12,6$ Nach etwa 12,6 Tagen würden alle Schülerinnen und Schüler die App nutzen.	
3	1.4 $\dot{A}(t) = 5,4 \cdot e^{0,27t}$; $\dot{A}(5) = 5,4e^{1,35} \approx 20,8$ Am fünften Tag nimmt die Nutzerzahl momentan um etwa 20,8 Nutzer pro Tag zu.	
3	1.5 Neues Modell: $10e^{0,27t} = 20e^{0,27t - \ln(2)}$; die Nutzerzahl erreicht jeden Wert $\frac{\ln(2)}{0,27}$ Tage später als im alten Modell. Verzögerung: $\frac{\ln(2)}{0,27} \approx 2,6$ Tage (oder: $10e^{0,27t} = 600 \Rightarrow t \approx 15,2$; $15,2 - 12,6$) Bewertung: jeder schlüssige Weg erhält volle BE (Verschiebung, neue Gleichung oder Verdopplungszeit).	
2	1.6 Nach dem Modell wächst die Nutzerzahl unbegrenzt; an der Schule gibt es aber nur 600 Schülerinnen und Schüler. Je mehr die App schon nutzen, desto weniger können neu hinzukommen, das Wachstum verlangsamt sich. Das Modell ist nur für die Anfangsphase geeignet.	
3	2.1 Boden: Länge $40 - 2x$, Breite $25 - 2x$; Höhe x : $V(x) = x(40 - 2x)(25 - 2x) = x(1000 - 130x + 4x^2) = 4x^3 - 130x^2 + 1000x$ Sinnvoll: $x > 0$ und $25 - 2x > 0$, also $D_V =]0; 12,5[$	
5	2.2 $V'(x) = 12x^2 - 260x + 1000 = 4(3x^2 - 65x + 250) = 4(x - 5)(3x - 50)$ $V'(x) = 0 \Rightarrow x = 5$ ($x = \frac{50}{3} \notin D_V$); V' wechselt bei $x = 5$ das Vorzeichen von $+$ nach $-$: Maximum (an den Rändern geht V gegen 0) $V(5) = 5 \cdot 30 \cdot 15 = 2250$: Der Kasten ist 30 cm lang, 15 cm breit, 5 cm hoch und fasst 2250 cm^3 .	
4	2.3 Höhe mindestens 6 cm: $6 \leq x < 12,5$ Für $5 < x < \frac{50}{3}$ ist $V'(x) < 0$, V ist also auf $[6; 12,5[$ streng monoton fallend; das größte Volumen ergibt sich am Rand $x = 6$: $V(6) = 6 \cdot 28 \cdot 13 = 2184$, also 2184 cm^3 . Bewertung: 1 BE nur bei begründeter Monotonie (nicht nur Einsetzen von $x = 6$).	
2	3.1 $b(x) = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$: Breite 8 m; $b(0) = 4$: größte Höhe 4 m	
2	3.2 $b'(x) = -\frac{1}{2}x$; $b'(4) = -2$: $\tan \alpha = 2 \Rightarrow \alpha \approx 63,4^\circ$	

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A II - (Fortsetzung)

- 3 **3.3** Wegen der Symmetrie zur y -Achse gilt für den Flächeninhalt:

$$A = 2 \int_0^4 \left(-\frac{1}{4}x^2 + 4\right) dx = 2 \left[-\frac{1}{12}x^3 + 4x\right]_0^4 = 2 \cdot \left(-\frac{64}{12} + 16\right) = \frac{64}{3} \approx 21,3$$

Die Toröffnung hat einen Flächeninhalt von etwa $21,3 \text{ m}^2$.

- 3 **3.4** $b(x) \geq 2,75 \iff -\frac{1}{4}x^2 \geq -1,25 \iff x^2 \leq 5 \iff -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$

Die Toröffnung ist auf einer Breite von $2\sqrt{5} \text{ m} \approx 4,47 \text{ m}$ mindestens $2,75 \text{ m}$ hoch.

- 3 **3.5** Halbe Breite zwischen Mitte und Rand: $x = 2$; $b(2) = -1 + 4 = 3$

Die Schätzung trifft nicht zu: Dort ist das Tor noch 3 m hoch, also drei Viertel der größten Höhe, nicht die Hälfte (2 m). Die Höhe nimmt zum Rand hin immer schneller ab (quadratischer, nicht linearer Zusammenhang).

43

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S I -
2	1.1 $\Omega = \{PPP; PPV; PVP; VPP; PVV; VPV; VVP; VVV\}; \Omega = 8$
2	1.2 $0,1^3$: alle drei Busse sind verspätet; $3 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9$: genau zwei sind verspätet. Ereignis: „Mindestens zwei der drei Busse sind verspätet.“
3	1.3 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$: „Mindestens einer der ersten beiden Busse ist verspätet.“ (Nicht beide sind pünktlich.) $P(\overline{A \cap B}) = 1 - 0,9 \cdot 0,9 = 0,19$
3	2.1 X ist binomialverteilt mit $n = 20$, $p = 0,1$. $P(E_1) = P(X = 3) = B(20; 0,1; 3) = 0,19012$ $P(E_2) = P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 1 - 0,95683 = 0,04317$
2	2.2 $E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0,1 = 2$; zu erwartende Gutschriften: $2 \cdot 2 \text{ €} = 4 \text{ €}$
4	3.1 Testgröße X : Anzahl der verspäteten Fahrten unter 100; $X \sim B(100; p)$ $H_0: p \geq 0,1$; $H_1: p < 0,1$; Ablehnungsbereich $\bar{A} = \{0; 1; \dots; k\}$ $P_{0,1}(X \leq k) \leq 0,05$: Tafelwerk $P(X \leq 4) = 0,02371$, $P(X \leq 5) = 0,05758 \Rightarrow k = 4$ Entscheidungsregel: Sind höchstens 4 der 100 Fahrten verspätet, wird H_0 abgelehnt und die Vermutung des Verkehrsbetriebs als gestützt angesehen; sonst nicht.
2	3.2 Fehler 2. Art: H_0 wird beibehalten, obwohl $p = 0,05$ gilt: $P_{0,05}(X \geq 5) = 1 - P_{0,05}(X \leq 4) = 1 - 0,43598 = 0,56402$ (Der Test erkennt eine Halbierung der Verspätungen also nur in weniger als der Hälfte der Fälle.)
2	4.1 $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$
3	4.2 Günstig: alle vier Badegäste in den Fächern 2 bis 10: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ $P = \frac{3024}{5040} = \frac{3}{5} = 0,6$
23	

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S II -

- 4 **1.1** Wegen der Unabhängigkeit gilt z. B. $P(G \cap R) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28$:

	R	$\bar{R}$	Σ
G	0,28	0,42	0,7
$\bar{G}$	0,12	0,18	0,3
Σ	0,4	0,6	1

- 2 **1.2** $P_R(G) = \frac{P(G \cap R)}{P(R)} = \frac{P(G) \cdot P(R)}{P(R)} = P(G) = 0,7$

Weil Größe und Schalenfarbe unabhängig sind, ist der Anteil der Größenklasse I unter den roten Äpfeln genauso groß wie unter allen Äpfeln.

- 4 **2** 50 Äpfel, jeweils Treffer „rot“ mit $p = 0,4$; bei einer großen Ernte ist die Auswahl annähernd unabhängig und p konstant: $X \sim B(50; 0,4)$

$$\mu = 50 \cdot 0,4 = 20;$$

$$\sigma = \sqrt{50 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = \sqrt{12} \approx 3,46; \quad [\mu - \sigma; \mu + \sigma] \approx [16,54; 23,46]$$

$$P(17 \leq X \leq 23) = P(X \leq 23) - P(X \leq 16) = 0,84383 - 0,15609 = 0,68774$$

- 5 **3** $Y = 1$: der erste Apfel ist rot; $Y = 2$: erst der zweite; $Y = 3$: die ersten beiden sind nicht rot (der dritte Apfel wird in jedem Fall genommen).

y	1	2	3
$P(Y = y)$	0,4	$0,6 \cdot 0,4 = 0,24$	$0,6^2 = 0,36$

$$E(Y) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,24 + 3 \cdot 0,36 = 1,96$$

Bei vielen solchen Fotoaufnahmen werden im Mittel knapp zwei Äpfel genommen.

- 4 **4.1** $P(M) = 0,05 \cdot 0,96 + 0,95 \cdot 0,02 = 0,048 + 0,019 = 0,067$

$$P_M(S) = \frac{0,048}{0,067} \approx 0,716$$

- 4 **4.2** Die Aussage trifft nicht zu: 96 % ist $P_S(M)$ (Anteil der markierten unter den schorfigen Äpfeln), gefragt ist aber $P_M(S) \approx 71,6\%$ – Ereignis und Bedingung wurden vertauscht. Ursache: Weil nur 5 % der Äpfel schorfig sind, fallen die wenigen Fehlmarkierungen bei den vielen einwandfreien Äpfeln ins Gewicht. Fast jeder dritte markierte Apfel ist einwandfrei; markierte Äpfel sollten daher von Hand nachkontrolliert werden, statt sie ohne Kontrolle auszusortieren.

Bewertung: 1 BE Vergleich der beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten, 1 BE Benennung des Denkfehlers, 1 BE Ursache (kleiner Anteil), 1 BE begründetes Urteil im Sachzusammenhang.

23