

Musterprüfung Nr. 002 (Nachtermin) zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 1: ohne Hilfsmittel

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben sämtliche Aufgaben zu bearbeiten.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

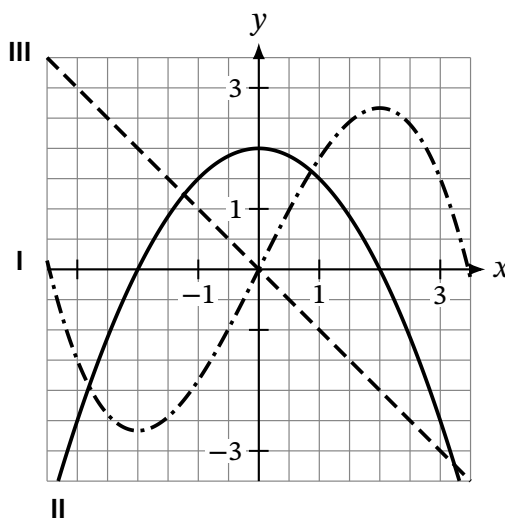
BE

1.0 Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto -x^3 + 6x^2, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

- 3 1.1 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f samt ihrer Vielfachheit und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \rightarrow -\infty$ und für $x \rightarrow +\infty$ an.
- 4 1.2 Die Funktion f^* ergibt sich aus f , indem die Definitionsmenge auf $[-1; 5]$ eingeschränkt wird.
Bestimmen Sie die Wertemenge von f^* .
- 3 1.3 Der Graph G_f hat an der Stelle $x = 2$ einen Wendepunkt (Nachweis nicht erforderlich).
Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an G_f in diesem Wendepunkt.
- 4 2 Die Abbildung zeigt die Graphen I, II und III einer ganzrationalen Funktion g , ihrer Ableitungsfunktion g' und einer Stammfunktion G von g , jeweils mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}$.



Entscheiden Sie, welcher der Graphen zu g , zu g' und zu G gehört, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

3.0 Gegeben ist die Funktion

$$g : x \mapsto e^{2x} - 4, \quad D_g = \mathbb{R}$$

Ihr Graph in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

2 3.1 Berechnen Sie die exakten Koordinaten der Schnittpunkte von G_g mit den Koordinatenachsen.

3 3.2 Beschreiben Sie, wie G_g aus dem Graphen der Funktion $x \mapsto e^x$, $D = \mathbb{R}$, durch geometrische Abbildungen hervorgeht.

3 3.3 Berechnen Sie den exakten Wert des Integrals $\int_0^{\ln(2)} g(x) \, dx$.

22

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Ein Spind im Schwimmbad wird mit einem Zahlenschloss mit drei Ringen gesichert, auf denen jeweils die Ziffern 0 bis 9 eingestellt werden können.

2 **1.1** Bestimmen Sie die Anzahl der Codes, die aus drei verschiedenen Ziffern bestehen.

2 **1.2** Die Ringe werden zufällig verdreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im eingestellten Code mindestens zwei gleiche Ziffern vorkommen.

2.0 In einem Fitnessstudio trainieren 60 % der Mitglieder an Geräten (G), 50 % besuchen Kurse (K) und 30 % tun beides. Ein Mitglied wird zufällig ausgewählt.

2 **2.1** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Mitglied weder an Geräten trainiert noch Kurse besucht.

2 **2.2** Untersuchen Sie, ob die Ereignisse G und K stochastisch unabhängig sind.

3.0 In einer Schublade liegen drei schwarze und zwei graue Socken. Im Dunkeln werden nacheinander zwei Socken ohne Zurücklegen herausgenommen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der herausgenommenen schwarzen Socken an.

2 **3.1** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und den Erwartungswert von X .

2 **3.2** Eine Mitschülerin behauptet: „Ohne Zurücklegen erhält man im Mittel weniger schwarze Socken als mit Zurücklegen, weil nach einer schwarzen Socke weniger schwarze übrig sind.“

Entscheiden Sie ohne Rechnung, ob die Behauptung zutrifft, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

12

Musterprüfung Nr. 002 (Nachtermin) zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 2: mit Hilfsmitteln

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Stochastik* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

- 1.0** Am Bahnhof einer Kleinstadt gibt es ein Fahrradparkhaus mit 400 Stellplätzen. An einem Werktag beschreibt die Funktion r mit

$$r(t) = 2t^3 - 30t^2 + 100t = 2t(t - 5)(t - 10), \quad D_r = [0; 10]$$

die momentane Änderungsrate der Anzahl der abgestellten Fahrräder. Dabei ist t die Zeit in Stunden ab 6:00 Uhr und $r(t)$ die Änderungsrate in Fahrrädern pro Stunde. Positive Werte bedeuten, dass mehr Fahrräder abgestellt als abgeholt werden. Um 6:00 Uhr stehen 60 Fahrräder im Parkhaus. Das Modell beschreibt die Anzahl als kontinuierliche Größe.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 1.1** Berechnen Sie $r(1)$ und interpretieren Sie den Wert im Sachzusammenhang.
- 1.2** Ermitteln Sie den Zeitpunkt im Intervall $[0; 5]$, zu dem die Anzahl der abgestellten Fahrräder am stärksten zunimmt, sowie die zugehörige Änderungsrate. Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.
- 1.3** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_r in ein Koordinatensystem.
Maßstab: 1 h $\hat{=}$ 1 cm; 20 Fahrräder pro Stunde $\hat{=}$ 1 cm
Verwenden Sie dazu die folgende Wertetabelle.

t	0	2	4	5	6	8	10
$r(t)$							

- 1.4** Berechnen Sie, um wie viel die Anzahl der abgestellten Fahrräder in den ersten fünf Stunden zunimmt.
- 1.5** Untersuchen Sie, ob die Stellplätze an diesem Tag ausreichen.
- 1.6** Ein Mitarbeiter behauptet: „Um 11:00 Uhr ist die Änderungsrate null. Dann stehen also keine Fahrräder im Parkhaus.“
Untersuchen Sie, ob diese Behauptung zutrifft.
- 1.7** Begründen Sie ohne weitere Integralrechnung, dass um 16:00 Uhr wieder genau 60 Fahrräder im Parkhaus stehen.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

2.0 Gegeben ist die Funktion

$$k : x \mapsto (x - 2)^2 \cdot e^x, \quad D_k = \mathbb{R}$$

Der Graph von k in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_k bezeichnet.

3 2.1 Ermitteln Sie die Nullstelle von k samt ihrer Vielfachheit sowie das Verhalten der Funktionswerte von k für $x \rightarrow -\infty$ und für $x \rightarrow +\infty$.

6 2.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_k .
[Mögliches Teilergebnis: $k'(x) = x(x - 2) \cdot e^x$]

3 2.3 Bestimmen Sie die Wertemenge von k und begründen Sie Ihre Angabe.

4 2.4 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_k für $-3 \leq x \leq 2,5$ in ein Koordinatensystem.
Maßstab für beide Achsen: $1 \text{ LE} \hat{=} 1 \text{ cm}$

3 2.5 Skizzieren Sie ohne Rechnung in ein neues Koordinatensystem den Graphen einer Stammfunktion K von k für $-3 \leq x \leq 2,5$ und begründen Sie wesentliche Merkmale Ihrer Skizze mithilfe der Eigenschaften von k .

43

BE

- 1.0** Eine neue Schul-App zur Organisation von Lerngruppen wird an einer Schule mit 600 Schülerinnen und Schülern eingeführt. Die App zeigt die Anzahl ihrer Nutzer an:

Zeit in Tagen	0	3	6
Anzahl der Nutzer	20	45	95

Die Anzahl der Nutzer wird modellhaft durch die Funktion A mit

$$A(t) = 20 \cdot e^{k \cdot t}, \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

und $k \in \mathbb{R}^+$ beschrieben. Dabei ist t die Zeit in Tagen seit der Einführung.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 1.1** Bestimmen Sie mithilfe des Werts für $t = 3$ den Wert des Parameters k . Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

Im Folgenden gilt:

$$A(t) = 20 \cdot e^{0,27 \cdot t}$$

- 1.2** Eine Mitschülerin beschreibt die Werte mit einer linearen Funktion L , deren Graph durch die ersten beiden Wertepaare verläuft. Untersuchen Sie, welches der beiden Modelle den Wert nach sechs Tagen besser beschreibt.

- 1.3** Berechnen Sie, nach welcher Zeit nach dem Modell A alle Schülerinnen und Schüler die App nutzen würden. Runden Sie auf eine Nachkommastelle.

- 1.4** Berechnen Sie $\dot{A}(5)$ und interpretieren Sie den Wert im Sachzusammenhang.

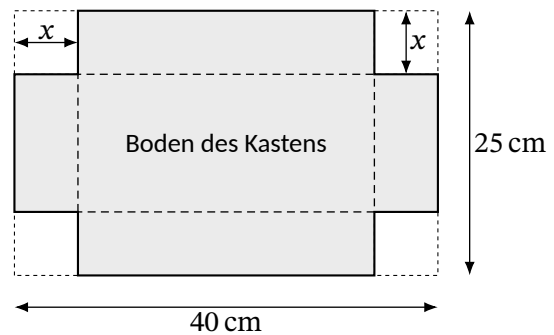
- 1.5** An einer Nachbarschule wird die App mit zunächst nur 10 Nutzern eingeführt; die Ausbreitung erfolgt mit dem gleichen Wert von k . Ermitteln Sie, um wie viele Tage später dort nach dem Modell 600 Nutzer erreicht würden.

- 1.6** Erläutern Sie, warum das Modell A die Entwicklung der Nutzerzahl nur für einen begrenzten Zeitraum beschreiben kann.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 2.0** Aus einem rechteckigen Stück Pappe mit den Seitenlängen 40 cm und 25 cm soll ein oben offener Sortierkasten für Schrauben gefaltet werden. Dazu werden an den vier Ecken gleich große Quadrate mit der Seitenlänge x (in cm) ausgeschnitten und die Ränder hochgeklappt (siehe nicht maßstäbliche Skizze).



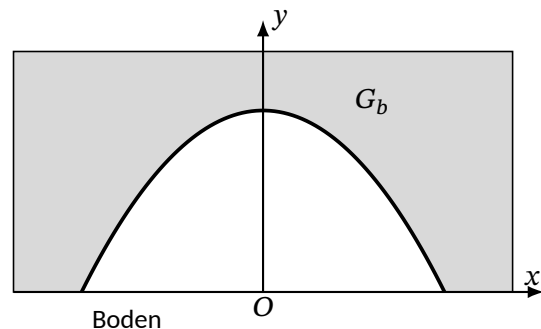
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 2.1** Zeigen Sie, dass für das Volumen des Kastens gilt: $V(x) = 4x^3 - 130x^2 + 1000x$. Geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für V an.
- 2.2** Ermitteln Sie die Seitenlänge x , für die das Volumen des Kastens am größten ist, sowie die Abmessungen und das Volumen dieses Kastens.
- 2.3** Damit lange Schrauben hineinpassen, muss der Kasten mindestens 6 cm hoch sein. Ermitteln Sie unter dieser Bedingung das größtmögliche Volumen des Kastens.

- 3.0** Das Tor einer Scheune hat einen parabelförmigen oberen Rand. Im Koordinatensystem der Skizze beschreibt der Graph G_b der Funktion b mit

$$b(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$$

den oberen Rand der Toröffnung; die x -Achse stellt den Boden dar. Dabei entspricht eine Längeneinheit 1 m. Betrachtet wird nur der Teil von G_b oberhalb der x -Achse.



- 3.1** Geben Sie die Breite der Toröffnung am Boden und ihre größte Höhe an.
- 3.2** Berechnen Sie den Winkel, unter dem der Rand der Toröffnung im Punkt $(4 | 0)$ auf den Boden trifft.
- 3.3** Berechnen Sie den Inhalt der Fläche der Toröffnung.
- 3.4** Ein Traktor mit Kabine ist 2,75 m hoch. Ermitteln Sie die Breite des Bereichs, in dem die Toröffnung mindestens 2,75 m hoch ist.
- 3.5** Ein Landwirt schätzt: „Auf halber Breite zwischen Mitte und Rand ist das Tor nur noch halb so hoch wie in der Mitte.“ Untersuchen Sie, ob diese Schätzung zutrifft.

43

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0** Eine Pendlerin fährt morgens nacheinander mit drei Stadtbussen. Jeder Bus ist unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % pünktlich (P), andernfalls verspätet (V).
- 2 1.1** Geben Sie einen geeigneten Ergebnisraum Ω an sowie die Anzahl seiner Elemente.
- 2 1.2** Formulieren Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $0,1^3 + 3 \cdot 0,1^2 \cdot 0,9$ berechnet werden kann.
- 3 1.3** Gegeben sind die Ereignisse
 A : „Der erste Bus ist pünktlich.“
 B : „Der zweite Bus ist pünktlich.“
 Beschreiben Sie das Ereignis $\overline{A \cap B}$ in Worten und berechnen Sie seine Wahrscheinlichkeit.
- 2.0** Ein Busfahrer fährt an einem Tag 20 Fahrten. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der verspäteten Fahrten an.
- 3 2.1** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
 E_1 : „Genau drei Fahrten sind verspätet.“
 E_2 : „Mehr als vier Fahrten sind verspätet.“
- 2 2.2** Für jede verspätete Fahrt erhalten Abonnenten eine Gutschrift von 2 €. Berechnen Sie die zu erwartende Summe der Gutschriften für die 20 Fahrten.
- 3.0** Nach einer Fahrplanänderung vermutet der Verkehrsbetrieb, dass der Anteil der verspäteten Fahrten unter 10 % gesunken ist (Gegenhypothese). Die Vermutung soll auf einem Signifikanzniveau von 5 % anhand von 100 zufällig ausgewählten Fahrten getestet werden.
- 4 3.1** Entwickeln Sie einen geeigneten Hypothesentest und formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel im Sachzusammenhang.
- 2 3.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, wenn der Anteil tatsächlich nur noch 5 % beträgt.
- 4.0** Im Hallenbad am Busbahnhof gibt es eine Reihe mit 10 nummerierten Schließfächern. Vier Badegäste belegen zufällig verschiedene Fächer.
- 2 4.1** Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, wie die vier Badegäste die Fächer belegen können.
- 3 4.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Fach mit der Nummer 1 frei bleibt.

23

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Bei der Apfelernte eines Obstbetriebs gehören 70 % der Äpfel zur Größenklasse I (G), 40 % der Äpfel haben eine überwiegend rote Schale (R). Größe und Schalenfarbe werden als stochastisch unabhängig betrachtet.

4 **1.1** Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel für die Ereignisse G und R .

2 **1.2** Erläutern Sie, warum der Anteil der Äpfel der Größenklasse I unter den roten Äpfeln ebenfalls 70 % beträgt.

4 **2** Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der roten Äpfel unter 50 zufällig ausgewählten Äpfeln an.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert von X innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegt. Begründen Sie dabei, dass X als binomialverteilt angesehen werden kann.

5 **3** Für ein Werbefoto wird ein roter Apfel gesucht. Aus einer Kiste werden nacheinander zufällig Äpfel genommen, bis ein roter dabei ist, höchstens jedoch drei. Die Zufallsgröße Y gibt die Anzahl der genommenen Äpfel an.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y sowie den Erwartungswert von Y und interpretieren Sie den Erwartungswert im Sachzusammenhang.

4.0 5 % der Äpfel haben Schorfflecken (S). Eine Sortiermaschine mit Kamera markiert 96 % der schorfigen Äpfel (M), aber auch 2 % der einwandfreien Äpfel.

4 **4.1** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein markierter Apfel tatsächlich Schorfflecken hat.

4 **4.2** Im Prospekt der Maschine heißt es: „Ein markierter Apfel ist mit 96 % Sicherheit schorfig.“
Untersuchen Sie, ob diese Aussage zutrifft, und beurteilen Sie, ob markierte Äpfel ohne weitere Kontrolle aussortiert werden sollten.

23