

- Lösungshinweise -

Musterprüfung Nr. 003 (Nachtermin) zum Fachabitur
 zum Erwerb der Fachhochschulreife
 an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Notenschlüssel:

Note	Punkte	Bewertungseinheiten	
		von	bis
+	15	100	96
1	14	95	91
–	13	90	86
+	12	85	81
2	11	80	76
–	10	75	71
+	9	70	66
3	8	65	61
–	7	60	56
+	6	55	51
4	5	50	46
–	4	45	41
+	3	40	34
5	2	33	27
–	1	26	20
6	0	19	0

Ergibt die Gesamtsumme der Bewertungseinheiten **n,5**,
 so wird einmalig zugunsten des Prüflings aufgerundet.

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 1 - A -

3 **1.1** $f(x) = x^2(x^2 - 2) = x^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

$x_{1;2} = 0$ (doppelte Nullstelle); $x_3 = -\sqrt{2}$, $x_4 = \sqrt{2}$ (einfache Nullstellen)

4 **1.2** $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x - 1)(x + 1)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = \pm 1$

Vorzeichen von f' : – für $x < -1$, + für $-1 < x < 0$, – für $0 < x < 1$, + für $x > 1$

$\Rightarrow$ Tiefpunkte $T_1(-1 | -1)$ und $T_2(1 | -1)$, Hochpunkt $H(0 | 0)$

3 **1.3** $f(2) = 16 - 8 = 8$; $f'(2) = 32 - 8 = 24$

Tangente: $y = 24(x - 2) + 8$, also $y = 24x - 40$

4 **2.1**

Aussage	w	f	n. e.
Der Graph von f hat an der Stelle $x = 2$ einen Hochpunkt.	x		
Der Graph von f hat an der Stelle $x = -1$ einen Tiefpunkt.		x	
Der Graph von f ist im Intervall $] -1; 1[$ linksgekrümmt.	x		
Es gilt $f(2) > 0$.			x

Begründungen (nicht verlangt): Bei $x = 2$ wechselt f' das Vorzeichen von + nach – (Hochpunkt). Bei $x = -1$ ist $f'(-1) = 0$, aber $f' \geq 0$ auf beiden Seiten: Terrassenpunkt, kein Tiefpunkt. Auf $] -1; 1[$ steigt f' , also ist $f'' > 0$. Funktionswerte von f lassen sich aus $G_{f'}$ nicht ablesen (Konstante der Stammfunktion unbekannt).

2 **2.2** $G_{f'}$ hat einen Tiefpunkt und einen Hochpunkt, f' also mindestens zwei Extremstellen; daher hat f' mindestens den Grad 3 und f mindestens den Grad 4.

Bewertung: 1 BE Begründung über die Extremstellen von f' (bzw. die Nullstellen von f''), 1 BE Grad von f .

3 **3.1** $h(0) = a = 2$; $h(2) = 2e^{2b} = 18 \Rightarrow e^{2b} = 9 \Rightarrow 2b = \ln(9) \Rightarrow b = \ln(3)$

3 **3.2** Tabelle B gehört zu r : Die Funktionswerte wachsen in gleichen Schritten jeweils um 3 (konstante Differenzen, linear).

Tabelle A gehört zu q : Die Funktionswerte verdreifachen sich in gleichen Schritten (konstanter Faktor, exponentiell).

Tabelle C gehört zu p (Differenzen 2, 4, 6 nehmen gleichmäßig zu, quadratisch).

22

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 1 - S -

2 **1.1** $P(\{TN; NT\}) = 0,3 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,3 = 0,42$

2 **1.2** E : „Er trifft mindestens einmal.“

$\bar{E} = \{NN\}$: „Er trifft bei keinem der beiden Würfe.“

2 **2.1**

	B	$\bar{B}$	Σ
A	0,18	0,42	0,60
$\bar{A}$	0,12	0,28	0,40
Σ	0,30	0,70	1

2 **2.2** $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,18}{0,30} = 0,6$

(Das ist genau $P(A)$: Musizieren und Vereinssport sind hier stochastisch unabhängig.)

2 **3.1** $P(\text{zwei Asse}) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$; $P(X = 3) = \frac{1}{4}$, $P(X = -1) = \frac{3}{4}$

$E(X) = 3 \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{3}{4} = 0$: Das Spiel ist fair.

2 **3.2** Ungünstig. Liegt nach dem ersten Ass nur noch ein Ass unter drei Karten, sinkt die Wahrscheinlichkeit für „zwei Asse“ von $\frac{1}{4}$ auf $\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; Einsatz und Auszahlung bleiben gleich. Der Gewinnfall tritt seltener ein, der Erwartungswert des Gewinns wird negativ.

Bewertung: 1 BE Entscheidung, 1 BE Begründung ohne Erwartungswert (seltenerer Gewinnfall bei gleicher Auszahlung).

12

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I -

- 6 **1.1** Knickfreie Übergänge: An den Übergangsstellen müssen Hang und Gelände bzw. Krone die gleiche Steigung haben; Gelände und Krone sind waagrecht: $w'(0) = 0$, $w'(8) = 0$.

Bedingungen: $w(0) = 0$; $w'(0) = 0$; $w(8) = 4$; $w'(8) = 0$

$$w(0) = 0 \Rightarrow d = 0; \quad w'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$w(8) = 4: 512a + 64b = 4; \quad w'(8) = 0: 192a + 16b = 0 \Rightarrow b = -12a$$

$$512a - 768a = 4 \Rightarrow a = -\frac{1}{64}; \quad b = \frac{3}{16}; \quad w(x) = -\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{16}x^2$$

Bewertung: 2 BE für die begründeten Bedingungen (knickfrei $\Rightarrow$ waagrechte Tangente an beiden Enden).

- 4 **1.2** $w'(x) = -\frac{3}{64}x^2 + \frac{3}{8}x$; $w''(x) = -\frac{3}{32}x + \frac{3}{8}$
 $w''(x) = 0 \Rightarrow x = 4$; w'' wechselt dort das Vorzeichen (Wendestelle, größte Steigung auf $[0; 8]$, da $w' = 0$ an den Rändern).

$$w'(4) = -\frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{3}{4}: \text{ Die größte Steigung beträgt 75 \% an der Stelle } x = 4.$$

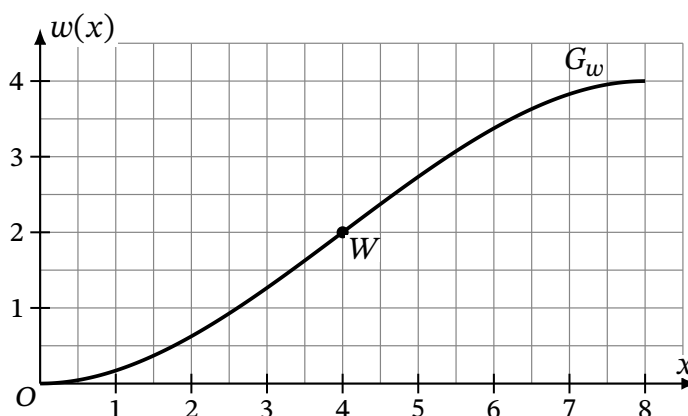
- 3 **1.3** $w'(2) = -\frac{3}{64} \cdot 4 + \frac{3}{8} \cdot 2 = -\frac{3}{16} + \frac{3}{4} = \frac{9}{16} = 0,5625$, also 56,25 % (nicht 37,5 %).

Die Schlussfolgerung trifft nicht zu: Die Steigung nimmt vom Fuß bis zur Mitte nicht gleichmäßig zu – w' ist eine quadratische Funktion. Halbieren wäre nur richtig, wenn die Steigung linear von 0 auf 75 % zunähme.

Bewertung: 1 BE $w'(2)$, 1 BE Vergleich mit 37,5 %, 1 BE Begründung (Steigung wächst nicht linear).

- 4 **1.4**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$w(x)$	0	0,17	0,63	1,27	2	2,73	3,38	3,83	4



- 2 **1.5** Auszählen der Kästchen (je $0,25 \text{ m}^2$) oder Überlegung: G_w ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt $W(4 | 2)$ und teilt das Rechteck $8 \text{ m} \times 4 \text{ m}$ in zwei gleich große Teile – das Flächenstück hat etwa 16 m^2 .

Bewertung: Werte zwischen 15 m^2 und 17 m^2 mit nachvollziehbarem Vorgehen sind zu akzeptieren.

- 4 **1.6** Flächeninhalt: $\int_0^8 w(x) dx = \left[-\frac{1}{256}x^4 + \frac{1}{16}x^3 \right]_0^8 = -16 + 32 = 16$

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I - (Fortsetzung)

Querschnitt: zwei Hänge und die Krone: $A = 2 \cdot 16 + 3 \cdot 4 = 44$ (in m^2)

Volumen: $V = 44 \cdot 200 = 8800$, also 8800 m^3 .

3 **2.1** $T(15) = 55 \Rightarrow 70 e^{-15k} = 35 \Rightarrow e^{-15k} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{15} \approx 0,05$

3 **2.2** $20 + 70 e^{-0,05t} \leq 60 \Rightarrow e^{-0,05t} \leq \frac{4}{7} \Rightarrow -0,05t \leq \ln\left(\frac{4}{7}\right) \Rightarrow t \geq \frac{\ln(7/4)}{0,05} \approx 11,2$

Nach etwa 11,2 Minuten ist der Kaffee höchstens 60°C heiß.

4 **2.3** $\dot{T}(t) = -3,5 \cdot e^{-0,05t}$; $\dot{T}(0) = -3,5$; $\dot{T}(10) = -3,5 \cdot e^{-0,5} \approx -2,1$ (in $^\circ\text{C}$ pro Minute)

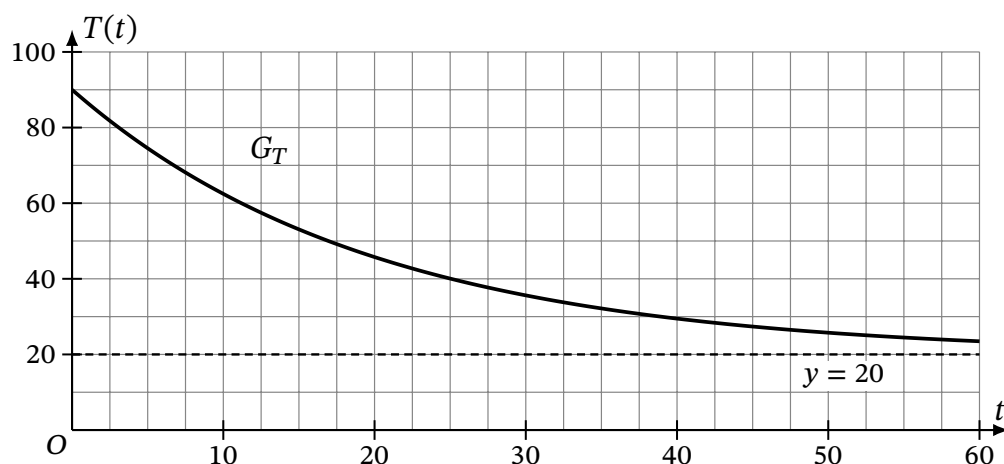
Zu Beginn kühlt der Kaffee momentan um $3,5^\circ\text{C}$ pro Minute ab, nach zehn Minuten nur noch um etwa $2,1^\circ\text{C}$ pro Minute: Die Abkühlung wird langsamer, je näher der Kaffee der Raumtemperatur kommt.

3 **2.4** $T(60) = 20 + 70 e^{-3} \approx 23,5$; Abweichung vom Messwert 28°C : etwa $4,5^\circ\text{C}$.

Das Modell beschreibt den Messwert nur grob, es unterschätzt die Temperatur. Mögliche Ursache: Der isolierte Becher gibt Wärme langsamer ab, je kleiner der Temperaturunterschied ist (die Abkühlkonstante ist nicht konstant), oder die Luft um den Becher ist wärmer als 20°C .

4 **2.5**

t	0	10	20	30	40	60
$T(t)$	90	62,5	45,8	35,6	29,5	23,5



3 **2.6** Der Graph nähert sich nun der Geraden $y = 25$ statt $y = 20$; der Startwert bleibt $25 + 65 = 90$.

Zu jedem Zeitpunkt ist $T^*(t) - T(t) = 5(1 - e^{-0,05t}) \geq 0$: Der neue Graph verläuft (außer bei $t = 0$) oberhalb des alten. Der Kaffee erreicht 60°C deshalb später.

Bewertung: 1 BE Asymptote, 1 BE Startwert, 1 BE begründete Entscheidung (später).

43

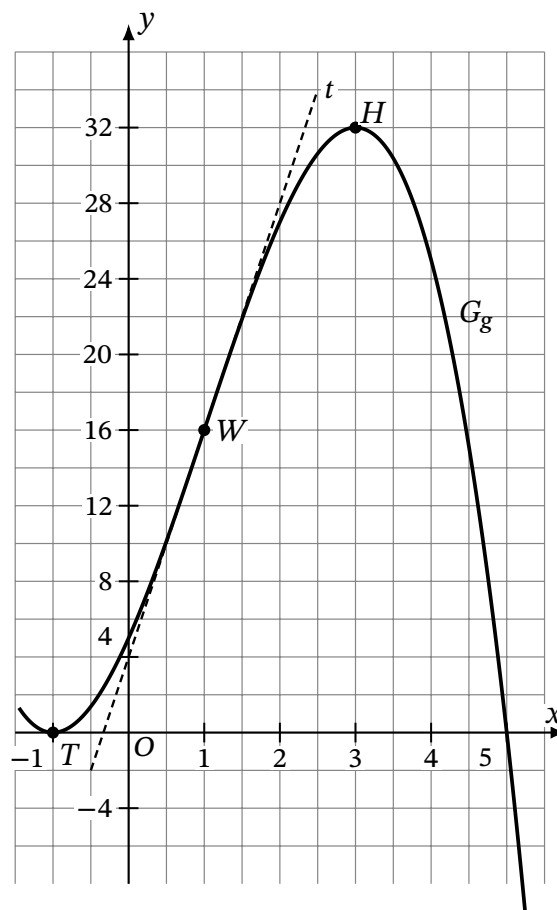
BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A II -

- 3 **1.1** $g(-1) = 1 + 3 - 9 + 5 = 0$; Polynomdivision bzw. Faktorisieren:
 $g(x) = -(x+1)(x^2 - 4x - 5) = -(x+1)^2(x-5)$
 $x_{1;2} = -1$ (doppelte Nullstelle); $x_3 = 5$ (einfache Nullstelle)
 $g(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow -\infty$; $g(x) \rightarrow -\infty$ für $x \rightarrow +\infty$
- 5 **1.2** $g'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x-3)(x+1)$; $g'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ oder $x = 3$
 Vorzeichen von g' : $-$ für $x < -1$, $+$ für $-1 < x < 3$, $-$ für $x > 3$
 $\Rightarrow$ Tiefpunkt $T(-1 | 0)$, Hochpunkt $H(3 | 32)$
- 4 **1.3** $g'(1) = 12$: Tangente t : $y = 12(x-1) + 16$, also $y = 12x + 4$
 $g(x) = 12x + 4 \Leftrightarrow -x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow -(x-1)^3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (dreifach)
 Die Tangente hat mit G_g nur den Punkt W gemeinsam; dort durchsetzt sie den Graphen (Wechsel von Links- zu Rechtskrümmung).

4 **1.4**

x	-1,4	-1	0	1	2	3	4	5	5,2
$g(x)$	1,02	0	5	16	27	32	25	0	-7,69



- 4 **1.5** G_g schließt mit der x -Achse auf $[-1; 5]$ ein Flächenstück ein, dort ist $g(x) \geq 0$:

$$\int_{-1}^5 g(x) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 5x \right]_{-1}^5 = 106,25 - (-1,75) = 108$$

Der Flächeninhalt beträgt 108 Flächeneinheiten.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A II - (Fortsetzung)

- 3 **1.6** Wegen $G' = g$: Für $x < 5$ ist $g(x) \geq 0$, G steigt; bei $x = -1$ ist $g(-1) = 0$ ohne Vorzeichenwechsel – G_G hat dort einen Terrassenpunkt. Bei $x = 5$ wechselt g das Vorzeichen von $+$ nach $-$: G_G hat dort einen Hochpunkt und fällt danach. Bei $x = 3$ (Maximum von g) hat G_G einen Wendepunkt mit größter Steigung.
Bewertung: 1 BE Monotonie, 1 BE Terrassenpunkt bei -1 , 1 BE Hochpunkt bei 5 (Wendepunkt bei 3 als Zusatz).
- 3 **2.1** Ein Quader hat vier Kanten der Länge x oben, vier unten und vier senkrechte Kanten der Höhe h : $8x + 4h = 240 \Rightarrow h = 60 - 2x$
 $V(x) = x \cdot x \cdot h = x^2(60 - 2x) = 60x^2 - 2x^3$
Sinnvoll: $x > 0$ und $h > 0$, also $D_V =]0; 30[$
- 5 **2.2** $V'(x) = 120x - 6x^2 = 6x(20 - x)$; $V'(x) = 0 \Rightarrow x = 20$ ($x = 0 \notin D_V$)
 V' wechselt bei $x = 20$ das Vorzeichen von $+$ nach $-$: Maximum (an den Rändern geht V gegen 0).
Abmessungen: $h = 60 - 40 = 20$, also ein Würfel mit 20 cm Kantenlänge;
 $V(20) = 8000 \text{ cm}^3$, also 8 Liter.
- 3 **2.3** $V(10) = 60 \cdot 100 - 2 \cdot 1000 = 4000$
 V steigt auf $]0; 20]$ und fällt auf $[20; 30[$ von 8000 bis gegen 0 ; der Wert 4000 wird deshalb ein zweites Mal angenommen (bei $x \approx 27,3$).
Die Behauptung ist falsch: Einem Volumen sind im Allgemeinen zwei Seitenlängen zugeordnet; die Zuordnung Volumen $\mapsto$ Seitenlänge ist keine Funktion.
Bewertung: 1 BE nur mit Begründung über Monotonie oder Graph (die zweite Stelle muss nicht berechnet werden).
- 3 **3.1** $100 \cdot b^2 = 81 \Rightarrow b^2 = 0,81 \Rightarrow b = 0,9$ ($b > 0$)
Deutung: Der Akku verliert jedes Jahr 10% seiner jeweils noch vorhandenen Kapazität.
- 3 **3.2** $100 \cdot 0,9^t < 50 \Rightarrow 0,9^t < 0,5 \Rightarrow t \cdot \ln(0,9) < \ln(0,5) \Rightarrow t > \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,9)} \approx 6,6$ (Umkehr des Ungleichheitszeichens wegen $\ln(0,9) < 0$)
Nach etwa $6,6$ Jahren liegt die Kapazität unter 50% .
- 3 **3.3** Händlermodell (linear): Verlust 10 Prozentpunkte pro Jahr;
nach fünf Jahren $100 - 5 \cdot 10 = 50$ (in %).
Exponentielles Modell: $K(5) = 100 \cdot 0,9^5 \approx 59$ (in %).
Für ältere Akkus ist das exponentielle Modell geeigneter: Nach dem linearen Modell wäre der Akku nach zehn Jahren völlig leer und danach sogar „negativ“; im exponentiellen Modell bleibt eine Restkapazität, die immer langsamer abnimmt.

43

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S I -	
4	1.1	Baumdiagramm: erste Stufe A (0,7) / B (0,3), zweite Stufe D / $\bar{D}$ mit 0,01 bzw. 0,05. $P(D) = 0,7 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,05 = 0,007 + 0,015 = 0,022$
3	1.2	$A \cup D$: „Die Lampe stammt aus Werk A oder ist defekt (oder beides).“ $P(A \cup D) = P(A) + P(\bar{A} \cap D) = 0,7 + 0,3 \cdot 0,05 = 0,715$
3	1.3	$P_D(A) = \frac{0,007}{0,022} \approx 0,318$ Unter den defekten Lampen stammen nur etwa 31,8 % aus Werk A, obwohl es 70 % aller Lampen fertigt – Werk A arbeitet zuverlässiger.
3	2.1	X ist binomialverteilt mit $n = 20$, $p = 0,05$. $P(E_1) = B(20; 0,05; 1) = 0,37735; \quad P(E_2) = P(X \leq 2) = 0,92452$
2	2.2	$E(X) = 20 \cdot 0,05 = 1$; zu erwartende Kosten: $1 \cdot 3 \text{ €} = 3 \text{ €}$ pro Karton
2	2.3	$\binom{15}{2} = 105$
4	3.1	Testgröße X : Anzahl der defekten Lampen unter 100; $X \sim B(100; p)$ $H_0 : p \geq 0,05; \quad H_1 : p < 0,05; \quad \text{Ablehnungsbereich } \bar{A} = \{0; \dots; k\}$ $P_{0,05}(X \leq k) \leq 0,05:$ $P(X \leq 1) = 0,03708, \quad P(X \leq 2) = 0,11826 \Rightarrow k = 1, \quad \bar{A} = \{0; 1\}$ Entscheidungsregel: Ist höchstens eine der 100 Lampen defekt, wird H_0 abgelehnt und die Behauptung der Werksleitung als gestützt angesehen; sonst nicht.
2	3.2	2 liegt nicht im Ablehnungsbereich: H_0 wird nicht abgelehnt, die Behauptung der Werksleitung ist durch den Test nicht gestützt. Das beweist aber nicht, dass weiterhin mindestens 5 % defekt sind – der Anteil in der Stichprobe (2 %) liegt sogar unter 5 %; die Abweichung kann aber noch zufällig sein. Eine größere Stichprobe könnte Klarheit bringen.
23		

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S II -

3 1.1

	P	$\bar{P}$	Σ
R	0,26	0,14	0,40
$\bar{R}$	0,24	0,36	0,60
Σ	0,50	0,50	1

3 1.2 $P_R(P) = \frac{0,26}{0,40} = 0,65$; $P_{\bar{R}}(P) = \frac{0,24}{0,60} = 0,4$

Die Aussage trifft nicht zu: Badegäste, die rutschen, kaufen in 65 % der Fälle Pommes, die übrigen nur in 40 % – also häufiger, nicht seltener. Die Ereignisse R und P sind stochastisch abhängig.

Bewertung: volle BE nur bei Vergleich bedingter Wahrscheinlichkeiten (nicht nur 0,26 mit 0,50).

5 2.1 Ausgaben: ohne Band und ohne Pommes 5 €; mit Band ohne Pommes oder ohne Band mit Pommes jeweils 8 €; mit beidem 11 €.

y in €	5	8	11
$P(Y = y)$	0,36	0,38	0,26

$P(Y = 8) = 0,14 + 0,24 = 0,38$: zwei Fälle führen zum selben Betrag.)

$$E(Y) = 5 \cdot 0,36 + 8 \cdot 0,38 + 11 \cdot 0,26 = 7,70$$

Auf lange Sicht gibt ein Badegast im Mittel 7,70 € für Eintritt und Pommes aus.

4 2.2 Mit dem neuen Preis x des Eintritts mit Rutschenband:

$$E(Y) = 0,40x + 0,60 \cdot 5 + 0,50 \cdot 3 = 0,40x + 4,50$$

$$0,40x + 4,50 = 8,10 \Rightarrow x = 9: \text{ Der Eintritt mit Rutschenband müsste 9 € kosten.}$$

4 3 20 Badegäste, jeweils Treffer „benutzt die Rutsche“ mit $p = 0,4$; bei vielen Badegästen ist die Auswahl annähernd unabhängig und p konstant: $Z \sim B(20; 0,4)$

$$P(Z = 8) = B(20; 0,4; 8) = 0,17971;$$

$$P(Z \geq 10) = 1 - P(Z \leq 9) = 1 - 0,75534 = 0,24466$$

4 4 Anzahl der Anordnungen: $6! = 720$

Die beiden Freunde als „Block“: $5!$ Anordnungen der fünf Einheiten, 2 Reihenfolgen im Block: $2 \cdot 5! = 240$

$$P = \frac{240}{720} = \frac{1}{3} \approx 0,333$$

23