

Musterprüfung Nr. 003 (Nachtermin) zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 1: ohne Hilfsmittel

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben sämtliche Aufgaben zu bearbeiten.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion

$$f: x \mapsto x^4 - 2x^2, \quad D_f = \mathbb{R}$$

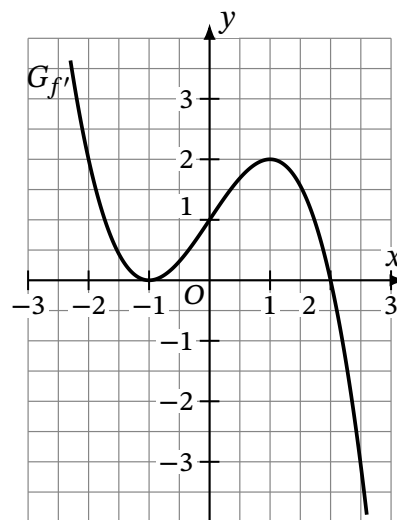
Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

3 1.1 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f samt ihrer Vielfachheit.

4 1.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f .

3 1.3 Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an G_f im Punkt $P(2 \mid f(2))$.

2.0 Die Abbildung zeigt den Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktion f .



4 2.1 Entscheiden Sie jeweils anhand der Abbildung, ob folgende Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind bzw. ob dies mit den gegebenen Informationen nicht entscheidbar (n. e.) ist. Kreuzen Sie entsprechend an.

Hinweis: Jedes richtig gesetzte Kreuz ergibt +1 BE, jedes falsch gesetzte - 0,5 BE und jedes nicht gesetzte 0 BE. Im ungünstigsten Fall wird die Aufgabe mit 0 BE bewertet.

Aussage	w	f	n. e.
Der Graph von f hat an der Stelle $x = 2$ einen Hochpunkt.			
Der Graph von f hat an der Stelle $x = -1$ einen Tiefpunkt.			
Der Graph von f ist im Intervall $] -1; 1[$ linksgekrümmt.			
Es gilt $f(2) > 0$.			

2 2.2 Geben Sie den kleinstmöglichen Grad der Funktion f an und begründen Sie Ihre Angabe.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 3.0 Der Graph der Funktion $h: x \mapsto a \cdot e^{b \cdot x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $D_h = \mathbb{R}$ verläuft durch die Punkte $P(0 | 2)$ und $Q(2 | 18)$.
- 3.1 Bestimmen Sie die exakten Werte von a und b .
- 3.2 Die folgenden Wertetabellen gehören zu den Funktionen $p: x \mapsto x^2 + x + 1$, $q: x \mapsto 3^x$ und $r: x \mapsto 3x + 1$ (jeweils $D = \mathbb{R}$).

x	0	1	2	3
Tabelle A	1	3	9	27
Tabelle B	1	4	7	10
Tabelle C	1	3	7	13

Entscheiden Sie, welche Tabelle zu welcher Funktion gehört, und begründen Sie Ihre Entscheidung für q und r ohne Einsetzen anhand der Änderung der Funktionswerte.

22

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Ein Dartspieler trifft das Zentrum der Scheibe mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 %. Er wirft zweimal; die Würfe sind voneinander unabhängig (Treffer T, kein Treffer N).

2 **1.1** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er genau einmal trifft.

2 **1.2** Beschreiben Sie das Ereignis $E = \{TT; TN; NT\}$ sowie sein Gegenereignis $\bar{E}$ in Worten.

2.0 Bei einer Befragung in einer Jahrgangsstufe sind 60 % der Befragten Mitglied in einem Sportverein (A), 30 % spielen ein Musikinstrument (B) und auf 18 % trifft beides zu. Eine befragte Person wird zufällig ausgewählt.

	B	$\bar{B}$	Σ
A	0,18		0,60
$\bar{A}$			
Σ	0,30		1

2 **2.1** Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel.

2 **2.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person, die ein Musikinstrument spielt, Mitglied in einem Sportverein ist.

3.0 Bei einem Spiel liegen vier Karten verdeckt auf dem Tisch, zwei davon sind Asse. Es wird zufällig eine Karte gezogen, angesehen und zurückgelegt; dann wird erneut gezogen. Der Einsatz beträgt 1 €. Sind beide gezogenen Karten Asse, werden 4 € ausgezahlt, sonst nichts. Die Zufallsgröße X gibt den Gewinn des Spielers (Auszahlung minus Einsatz) an.

2 **3.1** Zeigen Sie, dass das Spiel fair ist.

2 **3.2** Nun wird die erste Karte nicht zurückgelegt. Entscheiden Sie ohne Berechnung des Erwartungswerts, ob das Spiel dann für den Spieler günstig oder ungünstig ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

12

Musterprüfung Nr. 003 (Nachtermin) zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 2: mit Hilfsmitteln

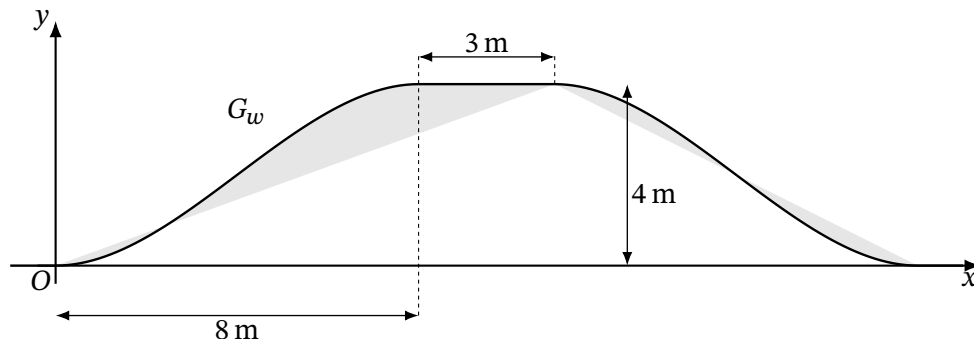
Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Stochastik* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

- 1.0** Für eine neue Bahnstrecke wird ein 200 m langer Bahndamm aufgeschüttet. Sein Querschnitt besteht aus zwei gleichen Hängen mit je 8 m waagrechter Länge und einer 3 m breiten, waagrechten Krone in 4 m Höhe (siehe nicht maßstäbliche Skizze).



Der linke Hang wird im Koordinatensystem der Skizze durch den Graphen G_w der Funktion w mit $w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, und $D_w = [0; 8]$ beschrieben. Dabei geben x und $w(x)$ Längen in Metern an. Der Hang geht knickfrei in das ebene Gelände und in die Krone über.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 1.1** Bestimmen Sie die Werte der Parameter a , b , c und d .
[Mögliches Ergebnis: $w(x) = -\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{16}x^2$]
- 1.2** Ermitteln Sie die Stelle, an der der Hang am steilsten ist, und geben Sie die Steigung an dieser Stelle in Prozent an.
- 1.3** Ein Planer meint: „Der Hang ist am Fuß waagrecht und in der Mitte 75 % steil. Auf halbem Weg dorthin, bei $x = 2$, ist er also halb so steil, nämlich 37,5 %.“ Untersuchen Sie, ob diese Schlussfolgerung zutrifft.
- 1.4** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen G_w in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab für beide Achsen: $1 \text{ m} \hat{=} 1 \text{ cm}$
- 1.5** Bestimmen Sie mithilfe Ihrer Zeichnung näherungsweise den Inhalt des Flächenstücks zwischen G_w , der x -Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = 8$.
- 1.6** Berechnen Sie den exakten Inhalt dieses Flächenstücks und damit das Volumen des Bahndamms.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 2.0** Frisch gebrühter Kaffee mit einer Temperatur von 90°C wird in einen offenen Thermobecher gefüllt und kühlt in einem Raum mit 20°C ab. Nach 15 Minuten hat er eine Temperatur von 55°C . Die Temperatur des Kaffees wird modellhaft durch die Funktion T mit

$$T(t) = 20 + 70 \cdot e^{-k \cdot t}, \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

und $k \in \mathbb{R}^+$ beschrieben. Dabei ist t die Zeit in Minuten seit dem Einfüllen und $T(t)$ die Temperatur in $^\circ\text{C}$.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 3 2.1** Bestimmen Sie mithilfe des Messwerts nach 15 Minuten den Wert von k . Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

Im Folgenden gilt:

$$T(t) = 20 + 70 \cdot e^{-0,05 \cdot t}$$

- 3 2.2** Der Kaffee soll erst getrunken werden, wenn er höchstens 60°C heiß ist. Ermitteln Sie, ab welchem Zeitpunkt das nach dem Modell der Fall ist. Runden Sie auf eine Nachkommastelle.

- 4 2.3** Berechnen Sie $\dot{T}(0)$ und $\dot{T}(10)$ und deuten Sie die beiden Werte und ihren Unterschied im Sachzusammenhang.

- 3 2.4** Nach 60 Minuten misst man eine Temperatur von 28°C . Untersuchen Sie, wie gut das Modell diesen Messwert beschreibt, und erläutern Sie eine mögliche Ursache für die Abweichung.

- 4 2.5** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen von T für $0 \leq t \leq 60$ in ein Koordinatensystem.
Maßstab: $5 \text{ min} \hat{=} 1 \text{ cm}$; $20^\circ\text{C} \hat{=} 1 \text{ cm}$

- 3 2.6** In einem wärmeren Raum gilt für die Temperatur des Kaffees

$$T^*(t) = 25 + 65 \cdot e^{-0,05 \cdot t}$$

Entscheiden Sie ohne Rechnung, wie sich der Graph dadurch verändert und ob der Kaffee 60°C früher oder später erreicht, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

43

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion

$$g: x \mapsto -x^3 + 3x^2 + 9x + 5, \quad D_g = \mathbb{R}$$

Der Graph von g in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

1.1 Ermitteln Sie die Nullstellen von g samt ihrer Vielfachheit und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von g für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow +\infty$ an.

1.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_g .

1.3 Der Graph G_g hat im Punkt $W(1 \mid 16)$ seinen Wendepunkt (Nachweis nicht erforderlich).

Untersuchen Sie, ob die Tangente an G_g im Punkt W außer W weitere gemeinsame Punkte mit G_g hat.

1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse G_g für $-1,4 \leq x \leq 5,2$ sowie die Tangente aus 1.3 in ein Koordinatensystem.

Maßstab: x -Achse 1 LE $\hat{=}$ 1 cm; y -Achse 4 LE $\hat{=}$ 1 cm

Verwenden Sie dazu die folgende Wertetabelle.

x	-1	0	1	2	3	4	5
$g(x)$							

1.5 Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das G_g mit der x -Achse einschließt.

1.6 Beschreiben Sie ohne Rechnung den Verlauf des Graphen einer Stammfunktion G von g für $x \geq -2$ und begründen Sie dabei die Lage besonderer Punkte.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 2.0** Für ein Regal werden Kisten mit einem Rahmen aus Stahlprofil gebaut. Jede Kiste ist ein Quader mit quadratischer Grundfläche der Seitenlänge x (in cm); für alle zwölf Kanten zusammen stehen genau 240 cm Profil zur Verfügung.
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.
- 3 **2.1** Zeigen Sie, dass für das Volumen einer solchen Kiste gilt: $V(x) = 60x^2 - 2x^3$. Geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für V an.
- 5 **2.2** Ermitteln Sie die Abmessungen der Kiste mit dem größtmöglichen Volumen und geben Sie dieses Volumen in Litern an.
- 3 **2.3** Ein Mitarbeiter behauptet: „Zu jedem möglichen Volumen gehört genau eine Seitenlänge x .“
Untersuchen Sie diese Behauptung am Beispiel des Volumens 4000 cm^3 .
- 3.0** Der Akku eines E-Scooters verliert mit der Zeit an Kapazität. Nach zwei Jahren hat er noch 81 % seiner Anfangskapazität. Die verbleibende Kapazität wird modellhaft durch die Funktion K mit $K(t) = 100 \cdot b^t$, $b \in \mathbb{R}^+$, $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschrieben (t in Jahren, $K(t)$ in Prozent der Anfangskapazität).
- 3 **3.1** Bestimmen Sie den Wert von b und deuten Sie ihn im Sachzusammenhang.
- 3 **3.2** Ermitteln Sie, ab welchem Zeitpunkt die Kapazität nach dem Modell unter 50 % liegt. Runden Sie auf eine Nachkommastelle.
- 3 **3.3** Ein Händler rechnet stattdessen mit einem jährlichen Verlust von 10 Prozentpunkten. Untersuchen Sie, wie sich die beiden Modelle nach fünf Jahren unterscheiden, und beurteilen Sie, welches Modell für ältere Akkus geeigneter ist.

43

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0** Ein Hersteller fertigt LED-Lampen in zwei Werken: 70 % der Lampen stammen aus Werk A, die übrigen aus Werk B. Bei Werk A sind 1 % der Lampen defekt (D), bei Werk B 5 %. Eine Lampe wird zufällig ausgewählt.
- 1.1** Bestimmen Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lampe defekt ist.
[Teilergebnis: $P(D) = 0,022$]
- 1.2** Beschreiben Sie das Ereignis $A \cup D$ in Worten und berechnen Sie seine Wahrscheinlichkeit.
- 1.3** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine defekte Lampe aus Werk A stammt, und interpretieren Sie das Ergebnis im Vergleich zu 70 %.
- 2.0** Ein Karton enthält 20 Lampen aus Werk B. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der defekten Lampen an.
- 2.1** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
 E_1 : „Genau eine Lampe ist defekt.“
 E_2 : „Höchstens zwei Lampen sind defekt.“
- 2.2** Jede defekte Lampe verursacht dem Hersteller durch Reklamationen Kosten von 3 €. Berechnen Sie die zu erwartenden Kosten pro Karton.
- 2.3** In einer Reihe von 15 Lampen sind genau zwei defekt. Bestimmen Sie die Anzahl der möglichen Lagen dieser zwei Lampen in der Reihe.
- 3.0** Nach einer Umstellung der Fertigung behauptet die Leitung von Werk B, dass inzwischen weniger als 5 % der Lampen defekt sind (Gegenhypothese). Die Behauptung soll auf einem Signifikanzniveau von 5 % anhand von 100 zufällig ausgewählten Lampen getestet werden.
- 3.1** Entwickeln Sie einen geeigneten Hypothesentest und formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel im Sachzusammenhang.
- 3.2** Bei der Prüfung mit einem Prüfstand sind 2 der 100 Lampen defekt. Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Hinblick auf die Behauptung der Werksleitung.

23

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0** In einem Freibad benutzen 40 % der Badegäste die Riesenrutsche (R), 50 % kaufen Pommes (P) und 26 % der Badegäste tun beides.
- 3 1.1** Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel für die Ereignisse R und P .
- 3 1.2** Ein Bademeister meint: „Wer rutscht, kauft seltener Pommes als die übrigen Badegäste.“
Untersuchen Sie, ob diese Aussage zutrifft.
- 5 2.1** Der Eintritt kostet mit Rutschenband 8 €, ohne Rutschenband 5 €; eine Portion Pommes kostet 3 €. Die Zufallsgröße Y gibt die Ausgaben eines zufällig ausgewählten Badegasts für Eintritt und Pommes an.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y sowie den Erwartungswert von Y und interpretieren Sie diesen.
- 4 2.2** Die Betreiber möchten die durchschnittlichen Ausgaben pro Badegast auf 8,10 € erhöhen, indem sie nur den Preis des Eintritts mit Rutschenband ändern. Ermitteln Sie diesen Preis.
- 4 3** 20 Badegäste werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße Z gibt die Anzahl derjenigen unter ihnen an, die die Riesenrutsche benutzen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse „Genau acht benutzen die Riesenrutsche“ und „Mindestens zehn benutzen die Riesenrutsche“. Begründen Sie dabei, dass Z als binomialverteilt angesehen werden kann.
- 4 4** Sechs Freunde legen sich zufällig auf sechs nebeneinanderstehende Liegen. Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Anordnungen sowie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei bestimmte der sechs Freunde nebeneinanderliegen.

23