

- Lösungshinweise -

Musterprüfung Nr. 003 zum Fachabitur
 zum Erwerb der Fachhochschulreife
 an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Notenschlüssel:

Note	Punkte	Bewertungseinheiten	
		von	bis
+	15	100	96
1	14	95	91
–	13	90	86
+	12	85	81
2	11	80	76
–	10	75	71
+	9	70	66
3	8	65	61
–	7	60	56
+	6	55	51
4	5	50	46
–	4	45	41
+	3	40	34
5	2	33	27
–	1	26	20
6	0	19	0

Ergibt die Gesamtsumme der Bewertungseinheiten n,5,
 so wird einmalig zugunsten des Prüflings aufgerundet.

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 1 - A -

- 3 **1.1** $f(x) = x^2(x^2 - 4) = x^2(x - 2)(x + 2)$
 $x_{1;2} = 0$ (doppelte Nullstelle); $x_3 = -2$, $x_4 = 2$ (einfache Nullstellen)

- 4 **1.2** $f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = \pm\sqrt{2}$
 Vorzeichen von f' : – für $x < -\sqrt{2}$, + für $-\sqrt{2} < x < 0$, – für $0 < x < \sqrt{2}$, + für $x > \sqrt{2}$
 $\Rightarrow$ Tiefpunkte $T_1(-\sqrt{2} | -4)$ und $T_2(\sqrt{2} | -4)$, Hochpunkt $H(0 | 0)$

- 3 **1.3** $f(1) = 1 - 4 = -3$; $f'(1) = 4 - 8 = -4$
 Tangente: $y = -4(x - 1) - 3$, also $y = -4x + 1$

Aussage	w	f	n. e.
Der Graph von f hat an der Stelle $x = -2$ einen Tiefpunkt.	x		
Der Graph von f hat an der Stelle $x = 1$ einen Hochpunkt.		x	
Der Graph von f ist im Intervall $] -1; 1[$ rechtsgekrümmt.	x		
Es gilt $f(0) = 0$.			x

- 4 **2.1** Begründungen (nicht verlangt): Bei $x = -2$ wechselt f' das Vorzeichen von – nach + (Tiefpunkt). Bei $x = 1$ ist $f'(1) = 0$, aber $f' \geq 0$ auf beiden Seiten: Terrassenpunkt, kein Hochpunkt. Auf $] -1; 1[$ fällt f' , also ist $f'' < 0$. Funktionswerte von f lassen sich aus $G_{f'}$ nicht ablesen (Konstante der Stammfunktion unbekannt).

- 2 **2.2** $G_{f'}$ hat einen Hochpunkt und einen Tiefpunkt, f' also mindestens zwei Extremstellen; daher hat f' mindestens den Grad 3 und f mindestens den Grad 4.
 Bewertung: 1 BE Begründung über die Extremstellen von f' (bzw. die Nullstellen von f''), 1 BE Grad von f .

- 3 **3.1** $h(0) = a = 3$; $h(2) = 3e^{2b} = 12 \Rightarrow e^{2b} = 4 \Rightarrow 2b = \ln(4) \Rightarrow b = \ln(2)$

- 3 **3.2** Tabelle A gehört zu r : Die Funktionswerte wachsen in gleichen Schritten jeweils um 2 (konstante Differenzen, linear).

Tabelle C gehört zu q : Die Funktionswerte verdoppeln sich in gleichen Schritten (konstanter Faktor, exponentiell).

Tabelle B gehört zu p (Differenzen 1, 3, 5 nehmen gleichmäßig zu, quadratisch).

22

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 1 - S -

2 **1.1** $P(\{TN; NT\}) = 0,8 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,8 = 0,32$

2 **1.2** E : „Sie trifft höchstens einmal.“ (nicht beide Würfe sind Treffer)
 $\bar{E} = \{TT\}$: „Sie trifft bei beiden Würfeln.“

2 **2.1**

	B	$\bar{B}$	Σ
A	0,25	0,25	0,50
$\bar{A}$	0,15	0,35	0,50
Σ	0,40	0,60	1

2 **2.2** $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,25}{0,40} = 0,625$

2 **3.1** $P(X = 3) = \frac{1}{4}, P(X = -1) = \frac{3}{4}$
 $E(X) = 3 \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{3}{4} = 0$: Das Spiel ist fair.

2 **3.2** Ungünstig. Die Wahrscheinlichkeit für „alle Münzen Kopf“ sinkt von $\frac{1}{4}$ auf $\frac{1}{8}$, Einsatz und Auszahlung bleiben gleich. Der Gewinnfall tritt seltener ein, der Erwartungswert des Gewinns wird negativ.

Bewertung: 1 BE Entscheidung, 1 BE Begründung ohne Rechnung (seltenerer Gewinnfall bei gleicher Auszahlung).

12

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I -

- 6 **1.1** Knickfreie Übergänge: An den Übergangsstellen müssen Hang und Gelände bzw. Krone die gleiche Steigung haben; Gelände und Krone sind waagrecht: $w'(0) = 0$, $w'(6) = 0$.

Bedingungen: $w(0) = 0$; $w'(0) = 0$; $w(6) = 3$; $w'(6) = 0$

$$w(0) = 0 \Rightarrow d = 0; \quad w'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$w(6) = 3: 216a + 36b = 3; \quad w'(6) = 0: 108a + 12b = 0 \Rightarrow b = -9a$$

$$216a - 324a = 3 \Rightarrow a = -\frac{1}{36}; \quad b = \frac{1}{4}; \quad w(x) = -\frac{1}{36}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$

Bewertung: 2 BE für die begründeten Bedingungen (knickfrei $\Rightarrow$ waagrechte Tangente an beiden Enden).

- 4 **1.2** $w'(x) = -\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{2}x$; $w''(x) = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{2}$
 $w''(x) = 0 \Rightarrow x = 3$; w'' wechselt dort das Vorzeichen (Wendestelle, größte Steigung auf $[0; 6]$, da $w' = 0$ an den Rändern).

$$w'(3) = -\frac{9}{12} + \frac{3}{2} = \frac{3}{4}: \text{ Die größte Steigung beträgt 75 \% an der Stelle } x = 3.$$

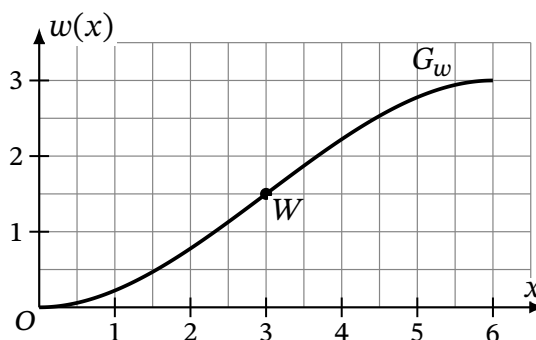
- 3 **1.3** $w'(1) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{5}{12} \approx 0,42$, also etwa 42 \% – das stimmt.

Die Schlussfolgerung trifft trotzdem nicht zu: Befahrbar ist der Hang nur, wenn die Steigung an *jeder* Stelle höchstens 50 \% beträgt. Nach 1.2 ist der Hang um die Stelle $x = 3$ mit bis zu 75 \% steiler als erlaubt; das Mähgerät kann dort nicht fahren.

Bewertung: 1 BE $w'(1)$, 1 BE Vergleich mit der größten Steigung aus 1.2, 1 BE Urteil (Bedingung gilt für jede Stelle).

- 4 **1.4**

x	0	1	2	3	4	5	6
$w(x)$	0	0,22	0,78	1,5	2,22	2,78	3



- 2 **1.5** Auszählen der Kästchen (je $0,25 \text{ m}^2$) oder Überlegung: G_w ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt $W(3 | 1,5)$ und teilt das Rechteck $6 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ in zwei gleich große Teile – das Flächenstück hat etwa 9 m^2 .

Bewertung: Werte zwischen 8 m^2 und 10 m^2 mit nachvollziehbarem Vorgehen sind zu akzeptieren.

- 4 **1.6** $\int_0^6 w(x) dx = \left[-\frac{1}{144}x^4 + \frac{1}{12}x^3 \right]_0^6 = -9 + 18 = 9$

Querschnitt: zwei Hänge und die Krone: $A = 2 \cdot 9 + 2 \cdot 3 = 24$ (in m^2)

Volumen: $V = 24 \cdot 120 = 2880$, also 2880 m^3 .

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I - (Fortsetzung)

3 **2.1** $T(10) = 140 \Rightarrow 230 e^{-10k} = 110 \Rightarrow e^{-10k} = \frac{11}{23} \Rightarrow k = -\frac{1}{10} \ln\left(\frac{11}{23}\right) \approx 0,07$

3 **2.2** $250 - 230 e^{-0,07t} \geq 200 \Rightarrow e^{-0,07t} \leq \frac{5}{23} \Rightarrow -0,07t \leq \ln\left(\frac{5}{23}\right) \Rightarrow t \geq \frac{\ln(4,6)}{0,07} \approx 21,8$

Nach etwa 21,8 Minuten ist der Stein mindestens 200 °C heiß.

4 **2.3** $\dot{T}(t) = 16,1 \cdot e^{-0,07t}$; $\dot{T}(0) = 16,1$; $\dot{T}(10) = 16,1 \cdot e^{-0,7} \approx 8,0$ (in °C pro Minute)

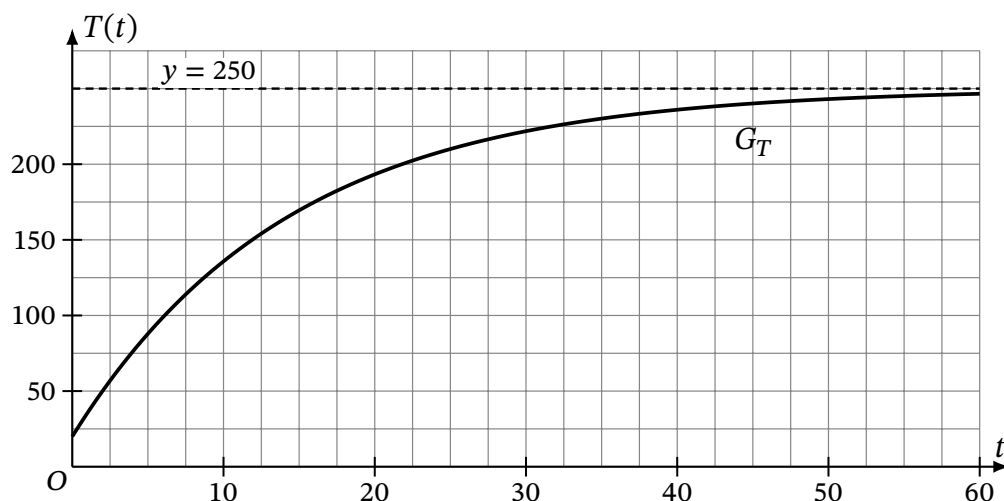
Zu Beginn erwärmt sich der Stein momentan um 16,1 °C pro Minute, nach zehn Minuten nur noch um etwa 8,0 °C pro Minute: Die Erwärmung wird mit steigender Temperatur langsamer.

3 **2.4** $T(60) = 250 - 230 e^{-4,2} \approx 246,6$; Abweichung vom Messwert 238 °C: etwa 8,6 °C (rund 4 %).

Mögliche Ursachen: Der Thermostat schaltet die Heizung zeitweise ab (die Ofentemperatur ist nicht konstant), der Stein gibt Wärme an das Blech ab; das Modell beschreibt die Annäherung an genau 250 °C.

4 **2.5**

t	0	10	20	30	40	60
$T(t)$	20	135,8	193,3	221,9	236,0	246,6



3 **2.6** Der Graph nähert sich nun der Geraden $y = 280$ statt $y = 250$; der Startwert bleibt $280 - 260 = 20$.

Zu jedem Zeitpunkt ist $T^*(t) - T(t) = 30(1 - e^{-0,07t}) \geq 0$: Der neue Graph verläuft (außer bei $t = 0$) oberhalb des alten. Der Stein erreicht 200 °C deshalb früher.

Bewertung: 1 BE Asymptote, 1 BE Startwert, 1 BE begründete Entscheidung (früher).

43

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A II -

- 3 **1.1** $g(-1) = 1 - 3 + 2 = 0$; Polynomdivision bzw. Faktorisieren:

$$g(x) = -(x+1)(x^2 - x - 2) = -(x+1)^2(x-2)$$

$$x_{1;2} = -1 \text{ (doppelte Nullstelle); } x_3 = 2 \text{ (einfache Nullstelle)}$$

$$g(x) \rightarrow +\infty \text{ für } x \rightarrow -\infty; g(x) \rightarrow -\infty \text{ für } x \rightarrow +\infty$$

- 5 **1.2** $g'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x-1)(x+1)$; $g'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

Vorzeichen von g' : $-$ für $x < -1$, $+$ für $-1 < x < 1$, $-$ für $x > 1$

$\Rightarrow$ Tiefpunkt $T(-1 | 0)$, Hochpunkt $H(1 | 4)$

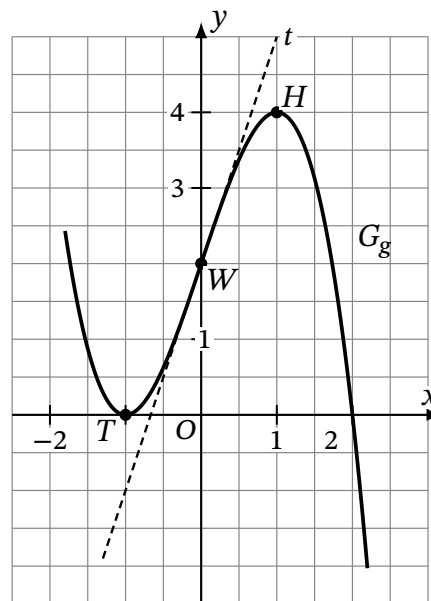
- 4 **1.3** $g'(0) = 3$: Tangente t : $y = 3x + 2$

$$g(x) = 3x + 2 \Leftrightarrow -x^3 + 3x + 2 = 3x + 2 \Leftrightarrow -x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (dreifach)}$$

Die Tangente hat mit G_g nur den Punkt W gemeinsam; dort durchsetzt sie den Graphen (Wechsel von Links- zu Rechtskrümmung).

- 4 **1.4**

x	-1,8	-1	-0,5	0	1	2	2,2
$g(x)$	2,43	0	0,63	2	4	0	-2,05



- 4 **1.5** G_g schließt mit der x -Achse auf $[-1; 2]$ ein Flächenstück ein, dort ist $g(x) \geq 0$:

$$\int_{-1}^2 g(x) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2 = 6 - \left(-\frac{3}{4} \right) = \frac{27}{4} = 6,75$$

Der Flächeninhalt beträgt 6,75 Flächeneinheiten.

- 3 **1.6** Wegen $G' = g$: Für $x < 2$ ist $g(x) \geq 0$, G steigt; bei $x = -1$ ist $g(-1) = 0$ ohne Vorzeichenwechsel – G_G hat dort einen Terrassenpunkt. Bei $x = 2$ wechselt g das Vorzeichen von $+$ nach $-$: G_G hat dort einen Hochpunkt und fällt danach. Bei $x = 1$ (Maximum von g) hat G_G einen Wendepunkt mit größter Steigung.

Bewertung: 1 BE Monotonie, 1 BE Terrassenpunkt bei -1 , 1 BE Hochpunkt bei 2 (Wendepunkt bei 1 als Zusatz).

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A II - (Fortsetzung)	
3	2.1 Gurtmaß voll ausgenutzt: $l + 2x + 2x = 300 \Rightarrow l = 300 - 4x$ $V(x) = x \cdot x \cdot l = x^2(300 - 4x) = 300x^2 - 4x^3$ Sinnvoll: $x > 0$ und $l > 0$, also $D_V =]0; 75[$	
5	2.2 $V'(x) = 600x - 12x^2 = 12x(50 - x)$; $V'(x) = 0 \Rightarrow x = 50$ ($x = 0 \notin D_V$) V' wechselt bei $x = 50$ das Vorzeichen von $+$ nach $-$: Maximum (an den Rändern geht V gegen 0). Abmessungen: $50 \text{ cm} \times 50 \text{ cm} \times 100 \text{ cm}$; $V(50) = 250\,000 \text{ cm}^3$, also 250 Liter.	
3	2.3 $V(25) = 300 \cdot 625 - 4 \cdot 15\,625 = 125\,000$ V steigt auf $]0; 50]$ und fällt auf $[50; 75[$ von 250 000 bis gegen 0; der Wert 125 000 wird deshalb ein zweites Mal angenommen (bei $x \approx 68,3$). Die Behauptung ist falsch: Einem Volumen sind im Allgemeinen zwei Seitenlängen zugeordnet; die Zuordnung Volumen $\mapsto$ Seitenlänge ist keine Funktion. <i>Bewertung:</i> 1 BE nur mit Begründung über Monotonie oder Graph (die zweite Stelle muss nicht berechnet werden).	
3	3.1 $3000 \cdot b^2 = 1920 \Rightarrow b^2 = 0,64 \Rightarrow b = 0,8$ ($b > 0$) Deutung: Die Kamera verliert jedes Jahr 20 % seines jeweiligen Werts.	
3	3.2 $3000 \cdot 0,8^t < 1000 \Rightarrow 0,8^t < \frac{1}{3} \Rightarrow t \cdot \ln(0,8) < \ln\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow t > \frac{\ln(1/3)}{\ln(0,8)} \approx 4,9$ (Umkehr des Ungleichheitszeichens wegen $\ln(0,8) < 0$) Nach etwa 4,9 Jahren liegt der Wert unter 1000 €.	
3	3.3 Händlermodell (linear): Verlust 600 € pro Jahr, nach fünf Jahren $3000 - 5 \cdot 600 = 0$ (in €). Exponentielles Modell: $W(5) = 3000 \cdot 0,8^5 \approx 983$ (in €). Für ältere Kameras ist das exponentielle Modell geeigneter: Eine gebrauchte Kamera behält einen Restwert; nach dem linearen Modell wäre es nach fünf Jahren wertlos und danach sogar „negativ“ viel wert.	
43		

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S I -	
4	1.1	Baumdiagramm: erste Stufe A (0,6) / B (0,4), zweite Stufe D / $\bar{D}$ mit 0,02 bzw. 0,05. $P(D) = 0,6 \cdot 0,02 + 0,4 \cdot 0,05 = 0,012 + 0,020 = 0,032$
3	1.2	$A \cup D$: „Die Kapsel stammt von Maschine A oder ist undicht (oder beides).“ $P(A \cup D) = P(A) + P(\bar{A} \cap D) = 0,6 + 0,4 \cdot 0,05 = 0,62$
3	1.3	$P_D(A) = \frac{0,012}{0,032} = 0,375$ Unter den undichten Kapseln stammen nur 37,5 % von Maschine A, obwohl sie 60 % aller Kapseln abfüllt – Maschine A arbeitet zuverlässiger.
3	2.1	X ist binomialverteilt mit $n = 50$, $p = 0,05$. $P(E_1) = B(50; 0,05; 2) = 0,26110; \quad P(E_2) = P(X \leq 3) = 0,76041$
2	2.2	$E(X) = 50 \cdot 0,05 = 2,5$; zu erwartende Kosten: $2,5 \cdot 2 \text{ €} = 5 \text{ €}$ pro Packung
2	2.3	$\binom{20}{3} = 1140$
4	3.1	Testgröße X : Anzahl der undichten Kapseln unter 100; $X \sim B(100; p)$ $H_0 : p \leq 0,05; \quad H_1 : p > 0,05; \quad \text{Ablehnungsbereich } \bar{A} = \{k; \dots; 100\}$ $P_{0,05}(X \geq k) \leq 0,05:$ $P(X \geq 10) = 1 - 0,97181 = 0,02819, \quad P(X \geq 9) = 1 - 0,93691 = 0,06309 \Rightarrow k = 10$ Entscheidungsregel: Sind mindestens 10 der 100 Kapseln undicht, wird H_0 abgelehnt und die Vermutung des Kunden als gestützt angesehen; sonst nicht.
2	3.2	9 liegt nicht im Ablehnungsbereich: H_0 wird nicht abgelehnt, die Vermutung des Kunden ist durch den Test nicht gestützt. Das beweist aber nicht, dass höchstens 5 % undicht sind – der Anteil in der Stichprobe (9 %) liegt über 5 %; die Abweichung kann aber noch zufällig sein. Eine größere Stichprobe könnte Klarheit bringen.
23		

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S II -

3 1.1

	P	$\bar{P}$	Σ
D	0,28	0,07	0,35
$\bar{D}$	0,32	0,33	0,65
Σ	0,60	0,40	1

3 1.2 $P_D(P) = \frac{0,28}{0,35} = 0,8; \quad P_{\bar{D}}(P) = \frac{0,32}{0,65} \approx 0,49$

Die Aussage trifft nicht zu: 3D-Besucher kaufen in 80 % der Fälle Popcorn, die übrigen Besucher nur in etwa 49 %. Die Ereignisse D und P sind stochastisch abhängig.

Bewertung: volle BE nur bei Vergleich bedingter Wahrscheinlichkeiten (nicht nur 0,28 mit 0,60).

5 2.1

y in €	9	12	14	17
$P(Y = y)$	0,33	0,07	0,32	0,28

$$E(Y) = 9 \cdot 0,33 + 12 \cdot 0,07 + 14 \cdot 0,32 + 17 \cdot 0,28 = 13,05$$

Auf lange Sicht gibt ein Besucher im Mittel 13,05 € für Karte und Popcorn aus.

4 2.2 Mit dem neuen Preis x der 3D-Karte: $E(Y) = 0,35x + 0,65 \cdot 9 + 0,60 \cdot 5 = 0,35x + 8,85$
 $0,35x + 8,85 = 14,10 \Rightarrow x = 15$: Die 3D-Karte müsste 15 € kosten.4 3 20 Besucher, jeweils Treffer „3D-Film“ mit $p = 0,35$; bei vielen Besuchern ist die Auswahl annähernd unabhängig und p konstant: $Z \sim B(20; 0,35)$
 $P(Z = 7) = B(20; 0,35; 7) = 0,18440$;
 $P(Z \geq 10) = 1 - P(Z \leq 9) = 1 - 0,87822 = 0,12178$ 4 4 Anzahl der Sitzordnungen: $5! = 120$
Die beiden Freunde als „Block“: 4! Anordnungen der vier Einheiten, 2 Reihenfolgen im Block: $2 \cdot 4! = 48$
 $P = \frac{48}{120} = 0,4$

23