

- Lösungshinweise -

Musterprüfung Nr. 004 (Nachtermin) zum Fachabitur
 zum Erwerb der Fachhochschulreife
 an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Notenschlüssel:

Note	Punkte	Bewertungseinheiten	
		von	bis
+	15	100	96
1	14	95	91
–	13	90	86
+	12	85	81
2	11	80	76
–	10	75	71
+	9	70	66
3	8	65	61
–	7	60	56
+	6	55	51
4	5	50	46
–	4	45	41
+	3	40	34
5	2	33	27
–	1	26	20
6	0	19	0

Ergibt die Gesamtsumme der Bewertungseinheiten **n,5**,
 so wird einmalig zugunsten des Prüflings aufgerundet.

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 1 - A -	
3	1.1 $f(x) = x^2(x + 3)$	$x_{1;2} = 0$ (doppelte Nullstelle); $x_3 = -3$ (einfache Nullstelle)
4	1.2 $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -2$ oder $x = 0$	Vorzeichen von f' : + für $x < -2$, – für $-2 < x < 0$, + für $x > 0$ $\Rightarrow$ Hochpunkt $H(-2 4)$, Tiefpunkt $T(0 0)$
3	1.3 Randwerte: $f(-3) = 0$, $f(1) = 1 + 3 = 4$	Im Intervall liegen der Hochpunkt $(-2 4)$ und der Tiefpunkt $(0 0)$; größter Wert 4, kleinster Wert 0. Wertemenge: $W = [0; 4]$
4	2.1 Steigungsdreieck zwischen den Rasterpunkten $(0 -2)$ und $(2 4)$ auf t : $m = \frac{4 - (-2)}{2 - 0} = 3$	Bestätigung: $p'(x) = 3x^2$, $p'(1) = 3$ – die Tangentensteigung stimmt mit dem abgelesenen Wert überein. $t: y = 3x + b$ mit P : $1 = 3 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -2$, also $t: y = 3x - 2$ <i>Bewertung:</i> 1 BE Steigung aus der Abbildung, 1 BE Ableitung an der Stelle, 1 BE Ansatz mit P , 1 BE Gleichung.
3	2.2 Beide Teilterme liefern an der Stelle 1 denselben Wert: $1^2 = 1$ und $2 \cdot 1 - 1 = 1$; der Graph hat dort keinen Sprung.	Steigung links: $(x^2)' = 2x$, an der Stelle 1 also 2; Steigung rechts: 2. Die Steigungen stimmen überein: Der Graph von g hat an der Stelle $x = 1$ keinen Knick, die Gerade ist dort Tangente an die Parabel; g ist an der Stelle 1 differenzierbar. <i>Bewertung:</i> volle BE nur mit Vergleich der Funktionswerte und der Steigungen von links und rechts.
3	3.1 Stammfunktionen: $K(x) = -3e^{-x} + 2x + C$ (Probe: $K'(x) = 3e^{-x} + 2$)	$K(0) = -3 + C = 0 \Rightarrow C = 3$: $K(x) = -3e^{-x} + 2x + 3$
2	3.2 Verschieben um 3 nach rechts: $x \mapsto e^{x-3}$; um 1 nach unten: $x \mapsto e^{x-3} - 1$	Für $x \rightarrow -\infty$ gilt $e^{x-3} \rightarrow 0$: Asymptote $y = -1$
22		

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 1 - S -

2 1.1 Schätzwert: $P(S) \approx \frac{240}{1200} = 0,20$
Nach dem empirischen Gesetz der großen Zahlen stabilisiert sich die relative Häufigkeit bei vielen Versuchen; bei 1200 Würfeln ist sie ein guter Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit.

2 1.2 Sechs Seiten bedeuten nicht, dass alle gleich wahrscheinlich sind (Laplace-Annahme): Ein gedruckter Würfel kann ungenau geformt sein oder einen verschobenen Schwerpunkt haben. Die Messung mit 20 % bei 1200 Würfeln weicht deutlich von $\frac{1}{6} \approx 16,7\%$ ab.

Bewertung: 1 BE fehlende Gleichwahrscheinlichkeit, 1 BE Bezug auf die Messung.

2 2.1

	A	$\bar{A}$	Σ
M	0,20	0,20	0,40
$\bar{M}$	0,30	0,30	0,60
Σ	0,50	0,50	1

2 2.2 $P_A(M) = \frac{P(A \cap M)}{P(A)} = \frac{0,20}{0,50} = 0,4$

2 3.1 Anzahl der Pizzen: $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$
Wahrscheinlichkeit für die Lieblingsbelegung: $\frac{1}{512} \approx 0,002$

2 3.2 Günstige Pizzen: $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$; $P = \frac{336}{512} \approx 0,66$

12

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I -

- 4 **1.1** 18 Uhr entspricht $t = 4$. Größter Wert: $P(4) = 8$ und $P'(4) = 0$ (waagrechte Tangente).
 $P(4) = 64a + 16b = 8$; $P'(t) = 3at^2 + 2bt$, $P'(4) = 48a + 8b = 0 \Rightarrow b = -6a$
 $64a - 96a = 8 \Rightarrow a = -0,25$; $b = 1,5$; $P(t) = -0,25t^3 + 1,5t^2$
Bewertung: 2 BE für die begründeten Bedingungen (Maximum $\Rightarrow P'(4) = 0$).
- 4 **1.2** $P'(t) = -0,75t^2 + 3t$; $P''(t) = -1,5t + 3$
 $P''(t) = 0 \Rightarrow t = 2$; P'' wechselt dort das Vorzeichen von $+$ nach $-$: größte Zunahme der Ankunftsrate (Wendestelle; an den Rändern ist $P'(0) = 0$, $P'(6) < 0$).
 $P'(2) = -3 + 6 = 3$: Um 16 Uhr ($t = 2$) nimmt die Ankunftsrate am stärksten zu, um 300 Besucher pro Stunde je Stunde.
- 3 **1.3** Stammfunktion: $F(t) = -0,0625t^4 + 0,5t^3$
Vor 18 Uhr: $\int_0^4 P(t) dt = F(4) - F(0) = -16 + 32 = 16$, also 1600 Besucher
Nach 18 Uhr: $\int_4^6 P(t) dt = F(6) - F(4) = 27 - 16 = 11$, also 1100 Besucher
Die Aussage trifft nicht zu: Der Graph ist zur Geraden $t = 4$ nicht symmetrisch; vor 18 Uhr kommen deutlich mehr Besucher (4 Stunden Anstieg gegenüber 2 Stunden Abfall).
Bewertung: volle BE nur mit beiden Integralen und Begründung über die fehlende Symmetrie bzw. die Zeitdauern.

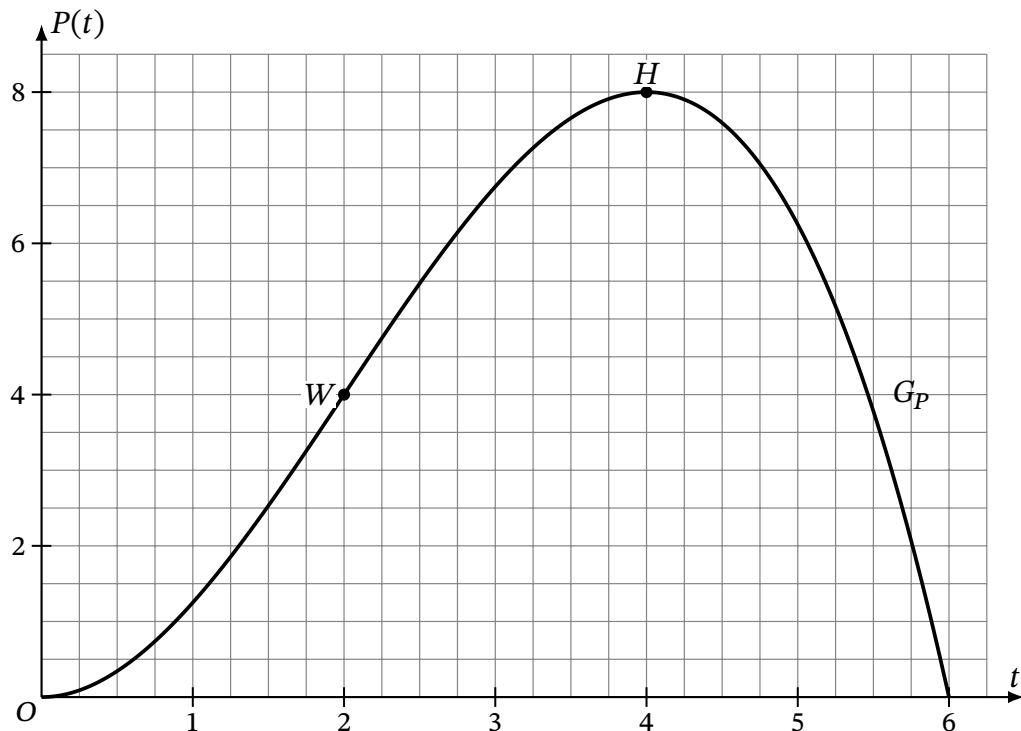
Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I - (Fortsetzung)

4 1.4

t	0	1	2	3	4	5	6
$P(t)$	0	1,25	4	6,75	8	6,25	0



5 1.5 $\int_0^6 P(t) dt = F(6) - F(0) = -81 + 108 = 27$

Zwischen 14 Uhr und 20 Uhr kommen etwa 2700 Besucher an.

Mittlere Ankunftsrate: $\frac{27}{6} = 4,5$, also 450 Besucher pro Stunde

3 1.6 Nach dem Modell ist $P(6) = 0$; die Zählanlage meldet um 20 Uhr noch 50 Besucher pro Stunde: Das Modell unterschätzt die Ankunftsrate am Abend etwas (Abweichung klein gegenüber dem Maximum von 800 pro Stunde).

Für $t > 6$ liefert das Modell negative Werte (z. B. $P(7) < 0$), die sinnlos sind. Es darf nur für $0 \leq t \leq 6$ verwendet werden; den späten Abend beschreibt es nicht.

Bewertung: 1 BE Vergleich mit der Zählung, 1 BE negative Werte, 1 BE Gültigkeitsbereich.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I - (Fortsetzung)

3 **2.1** $N(8) = 12 \Rightarrow 3e^{8k} = 12 \Rightarrow e^{8k} = 4 \Rightarrow k = \frac{\ln(4)}{8} \approx 0,17$

3 **2.2** $3e^{0,17t} > 150 \Rightarrow e^{0,17t} > 50 \Rightarrow t > \frac{\ln(50)}{0,17} \approx 23,0$

Nach etwa 23,0 Stunden ist die Hälfte des Grenzwerts (150 Millionen pro Kubikzentimeter) überschritten.

3 **2.3** Grenzwert erreicht: $3e^{0,17t} = 300 \Rightarrow t = \frac{\ln(100)}{0,17} \approx 27,1$

Von der Hälfte bis zum Grenzwert vergehen nur $27,1 - 23,0 \approx 4,1$ Stunden – genau die Verdopplungszeit $\frac{\ln(2)}{0,17} \approx 4,1$.

Die Aussage ist falsch: Beim exponentiellen Wachstum verdoppelt sich die Anzahl in gleichen Zeitabständen; die letzte Verdopplung dauert so lange wie jede andere und nicht so lange wie der ganze bisherige Anstieg.

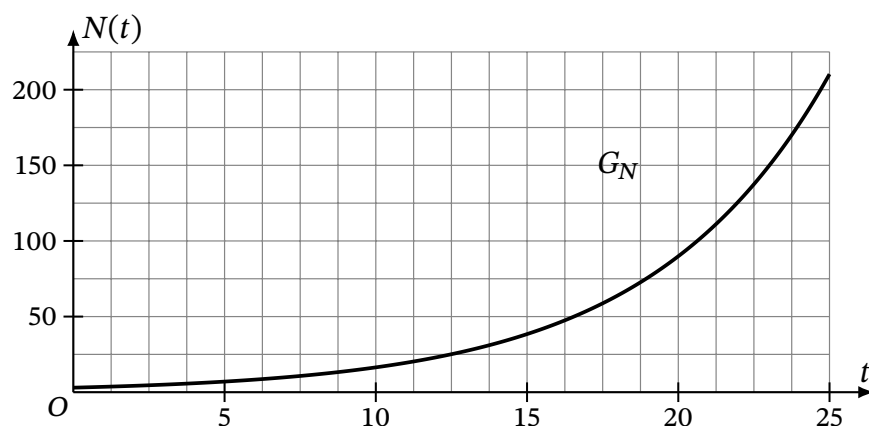
Bewertung: volle BE nur mit Begründung über die konstante Verdopplungszeit.

3 **2.4** $\dot{N}(t) = 0,51 e^{0,17t}$; $\dot{N}(10) = 0,51 e^{1,7} \approx 2,8$

Nach 10 Stunden nimmt die Keimanzahl momentan um etwa 2,8 Millionen pro Kubikzentimeter und Stunde zu.

4 **2.5**

t	0	5	10	15	20	25
$N(t)$	3	7,0	16,4	38,4	89,9	210,3



4 **2.6** Für $t \rightarrow \infty$ gilt $N(t) \rightarrow \infty$; die Anzahl ist aber auf höchstens 1500 Millionen pro Kubikzentimeter begrenzt. Das Modell eignet sich daher nicht für beliebig lange Zeiten.
 $3e^{0,17t} = 1500 \Rightarrow t = \frac{\ln(500)}{0,17} \approx 36,6$: Spätestens ab etwa 36,6 Stunden gilt das Modell sicher nicht mehr (in Wirklichkeit flacht das Wachstum schon früher ab).

Bewertung: 2 BE Begründung über das Verhalten für $t \rightarrow \infty$, 2 BE Zeitpunkt.

43

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A II -

3 **1.1** $e^{-\frac{1}{2}x} > 0$ für alle x : $g(x) = 0 \iff x + 2 = 0$; Nullstelle $x = -2$

$x \rightarrow +\infty$: $e^{-\frac{1}{2}x} \rightarrow 0$ „setzt sich gegen“ $x + 2$ durch: $g(x) \rightarrow 0$

$x \rightarrow -\infty$: $x + 2 \rightarrow -\infty$ und $e^{-\frac{1}{2}x} \rightarrow +\infty$: $g(x) \rightarrow -\infty$

5 **1.2** Produktregel: $g'(x) = 1 \cdot e^{-\frac{1}{2}x} + (x + 2) \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right) = -\frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}$

$g'(x) = 0 \iff x = 0$; Vorzeichen von g' : $+$ für $x < 0$, $-$ für $x > 0$

$g(0) = 2$: Hochpunkt $H(0 | 2)$

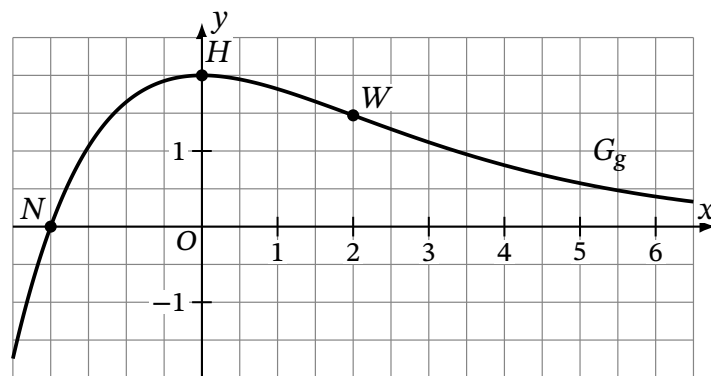
4 **1.3** $g''(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{4}xe^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{4}(x - 2)e^{-\frac{1}{2}x}$; $g''(x) = 0 \iff x = 2$

$g''(x) < 0$ für $x < 2$: G_g rechtsgekrümmt; $g''(x) > 0$ für $x > 2$: G_g linksgekrümmt

$g(2) = \frac{4}{e} \approx 1,47$: Wendepunkt $W\left(2 \mid \frac{4}{e}\right)$

4 **1.4**

x	-2,5	-2	-1	0	1	2	4	6
$g(x)$	-1,75	0	1,65	2	1,82	1,47	0,81	0,40



4 **1.5** $G'(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x} + (x + 4)e^{-\frac{1}{2}x} = (x + 2)e^{-\frac{1}{2}x} = g(x) \checkmark$

Das Flächenstück liegt zwischen der Nullstelle -2 und der y -Achse; dort ist $g(x) \geq 0$:

$$\int_{-2}^0 g(x) dx = G(0) - G(-2) = -8 - (-4e) = 4e - 8 \approx 2,87 \text{ (FE)}$$

3 **1.6** Differenz: $g(x) - 2e^{-\frac{1}{2}x} = xe^{-\frac{1}{2}x} \geq 0$ für $0 \leq x \leq 2$.

Nach 1.2 ist $g'(x) = -\frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}$, also ist $-2g$ eine Stammfunktion von $xe^{-\frac{1}{2}x}$:

$$\int_0^2 xe^{-\frac{1}{2}x} dx = [-2g(x)]_0^2 = 2g(0) - 2g(2) = 4 - \frac{8}{e} \approx 1,06 \text{ (FE)}$$

Bewertung: volle BE auch für andere korrekte Wege (z. B. Stammfunktionen von g und $2e^{-\frac{1}{2}x}$ getrennt).

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A II - (Fortsetzung)

- 3 **2.1** Boden: Länge $42 - 2x$, Breite $32 - 2x$; Höhe x
 $V(x) = x(42 - 2x)(32 - 2x) = x(1344 - 148x + 4x^2) = 4x^3 - 148x^2 + 1344x$
 Sinnvoll: $x > 0$ und $32 - 2x > 0$, also $D_V =]0; 16[$
- 5 **2.2** $V'(x) = 12x^2 - 296x + 1344 = 4(3x^2 - 74x + 336) = 4(x - 6)(3x - 56)$
 $V'(x) = 0 \Rightarrow x = 6$ ($x = \frac{56}{3} \notin D_V$); $V''(x) = 24x - 296$, $V''(6) = -152 < 0$: Maximum
 Abmessungen: $30 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$; $V(6) = 6 \cdot 30 \cdot 20 = 3600$ (in cm^3), also 3,6 Liter.
- 3 **2.3** Werden Länge und Breite des Zuschnitts halbiert, so ist die ganze Figur im Maßstab 1 : 2 verkleinert; die optimale Schachtel ist die im Maßstab 1 : 2 verkleinerte Schachtel aus 2.2 ($x = 3$).
 Beim Verkleinern mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ werden alle drei Kanten halb so lang, das Volumen wird $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ so groß: $\frac{3600}{8} = 450$ (in cm^3).
 Die Aussage ist falsch: Das größtmögliche Volumen sinkt auf ein Achtel.
Bewertung: volle BE nur mit Begründung über die Ähnlichkeit (Faktor $\left(\frac{1}{2}\right)^3$); eine erneute vollständige Rechnung ist nicht verlangt.
- 3 **3.1** $r(t) = 0 \iff t^2 - 10t + 16 = 0 \iff t = 2$ oder $t = 8$ (Schnittpunkte von G_r mit der t -Achse)
 $r(t) > 0$ für $0 \leq t < 2$ und $8 < t \leq 10$: Die Wassermenge nimmt zu.
 $r(t) < 0$ für $2 < t < 8$: Die Wassermenge nimmt ab.
- 3 **3.2** Änderung der Wassermenge: $\int_0^{10} r(t) dt = \left[\frac{1}{6}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 8t \right]_0^{10} = \frac{500}{3} - 250 + 80 = -\frac{10}{3}$
 Wassermenge nach 10 Stunden: $30 - \frac{10}{3} \approx 26,7$ (in m^3)
- 3 **3.3** Die Wassermenge $V(t) = 30 + \int_0^t r(s) ds$ hat bei $t = 8$ ein lokales Minimum (r wechselt von $-$ nach $+$).
 $V(8) = 30 + \left(\frac{256}{3} - 160 + 64 \right) = 30 - \frac{32}{3} \approx 19,3$; Randwerte: $V(0) = 30$, $V(10) \approx 26,7$.
 Die Behauptung trifft zu: Nach 8 Stunden war die Wassermenge kleiner als zu jedem anderen Zeitpunkt, auch kleiner als an den Rändern des Zeitraums.
Bewertung: 1 BE lokales Minimum, 1 BE Wert $V(8)$, 1 BE Vergleich mit den Randwerten.

43

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S I -

3 **1.1** X : Anzahl der Gewinnlose, $X \sim B(5; 0,25)$
 $P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot 0,25^2 \cdot 0,75^3 = 0,26367$; $P(X \geq 1) = 1 - 0,75^5 = 0,76270$

4 **1.2** $P(X \geq 1) = 1 - 0,75^n \geq 0,95 \Rightarrow 0,75^n \leq 0,05 \Rightarrow n \cdot \ln(0,75) \leq \ln(0,05)$
 $n \geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,75)} \approx 10,4$ (Umkehr des Ungleichheitszeichens wegen $\ln(0,75) < 0$)
 Man muss mindestens 11 Lose kaufen.

4 **1.3** Reinerlös pro Los: Niete 1 €, kleiner Gewinn 1 € – 2 € = –1 €, großer Gewinn 1 € – 5 € = –4 €

x in €	1	–1	–4
$P(X = x)$	0,75	0,20	0,05

$$E(X) = 1 \cdot 0,75 + (-1) \cdot 0,20 + (-4) \cdot 0,05 = 0,35$$

Auf lange Sicht nimmt der Kiosk im Mittel 0,35 € pro verkauftem Los ein.

3 **2.1** Baumdiagramm: erste Stufe S (0,7) / $\bar{S}$ (0,3), zweite Stufe M / $\bar{M}$ mit 0,4 bzw. 0,1.
 $P(M) = 0,7 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,1 = 0,28 + 0,03 = 0,31$

3 **2.2** $P_M(S) = \frac{0,28}{0,31} \approx 0,903$

Unter den Käufern mehrerer Lose sind etwa 90 % Stammkunden, deutlich mehr als ihr Anteil von 70 % unter allen Loskäufern: Stammkunden kaufen häufiger mehrere Lose.

4 **3.1** Testgröße X : Anzahl der Gewinnlose unter 50; $X \sim B(50; p)$
 $H_0 : p \geq 0,25$; $H_1 : p < 0,25$; Ablehnungsbereich $\bar{A} = \{0; \dots; k\}$
 $P_{0,25}(X \leq k) \leq 0,05$:
 $P(X \leq 7) = 0,04526$, $P(X \leq 8) = 0,09160 \Rightarrow k = 7$

Entscheidungsregel: Sind höchstens 7 der 50 Lose Gewinnlose, wird H_0 abgelehnt und die Vermutung der Kunden als gestützt angesehen; sonst nicht.

2 **3.2** 9 liegt nicht im Ablehnungsbereich: H_0 wird nicht abgelehnt; die Vermutung der Kunden wird durch den Test nicht gestützt.

Das beweist aber nicht, dass mindestens 25 % Gewinnlose dabei sind – der Anteil in der Stichprobe (18 %) liegt sogar darunter; die Abweichung kann aber noch zufällig sein.

23

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S II -

3 1.1

	C	$\bar{C}$	Σ
W	0,20	0,35	0,55
$\bar{W}$	0,20	0,25	0,45
Σ	0,40	0,60	1

3 1.2 $P_W(C) = \frac{0,20}{0,55} \approx 0,364$; $P_{\bar{W}}(C) = \frac{0,20}{0,45} \approx 0,444$

Die Aussage trifft nicht zu: Von den Werkstattnutzern gehen etwa 36 % ins Café, von den übrigen Mitgliedern etwa 44 % – also seltener, nicht häufiger. Die Ereignisse W und C sind stochastisch abhängig.

Bewertung: volle BE nur bei Vergleich bedingter Wahrscheinlichkeiten (nicht nur 0,20 mit 0,40).

5 2.1

y in €	1	2	3	4
$P(Y = y)$	0,25	0,20	0,35	0,20

$$E(Y) = 1 \cdot 0,25 + 2 \cdot 0,20 + 3 \cdot 0,35 + 4 \cdot 0,20 = 2,50$$

Auf lange Sicht zahlt ein Mitglied im Mittel 2,50 € Monatsbeitrag.

4 2.2 Mit dem neuen Beitrag x : $E(Y) = 0,25 \cdot 1 + 0,20 \cdot 2 + 0,35 \cdot 3 + 0,20 x = 1,70 + 0,20 x$
 $1,70 + 0,20 x = 2,70 \Rightarrow x = 5$: Der Beitrag für Mitglieder, die beides nutzen, müsste 5 € betragen.

4 3 20 Mitglieder, jeweils Treffer „nutzt das Café nicht“ mit $p = 0,6$; bei vielen Mitgliedern ist die Auswahl annähernd unabhängig und p konstant: $Z \sim B(20; 0,6)$

$$P(Z = 12) = B(20; 0,6; 12) = B(20; 0,4; 8) = 0,17971$$

$$P(Z \geq 15) = P(\text{höchstens 5 nutzen das Café}) = \sum_{i=0}^5 B(20; 0,4; i) = 0,12560$$

4 4 Anzahl der möglichen Pläne: $6! = 720$

Graffiti am Montag und Kochen am Samstag: Die übrigen vier Workshops verteilen sich auf vier Tage: $4! = 24$

$$P = \frac{24}{720} = \frac{1}{30} \approx 0,033$$

23