

Musterprüfung Nr. 004 (Nachtermin) zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 1: ohne Hilfsmittel

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben sämtliche Aufgaben zu bearbeiten.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion

$$f: x \mapsto x^3 + 3x^2, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

3 1.1 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f samt ihrer Vielfachheit.

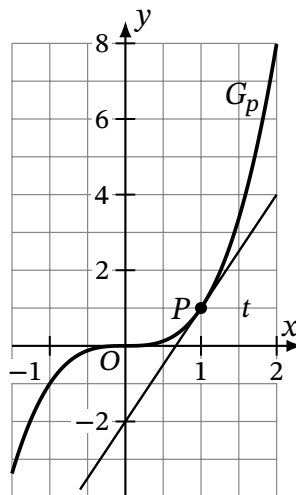
4 1.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f .

3 1.3 Die Definitionsmenge von f wird auf $[-3; 1]$ eingeschränkt. Ermitteln Sie die Wertemenge der so eingeschränkten Funktion.

2.0 Gegeben sind die Funktionen $p: x \mapsto x^3$ mit $D_p = \mathbb{R}$ und

$$g: x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{für } x > 1 \end{cases}, \quad D_g = \mathbb{R}$$

4 2.1 Die Abbildung zeigt den Graphen G_p von p und die Tangente t an G_p im Punkt $P(1 | 1)$. Ermitteln Sie die Steigung von t mithilfe der Abbildung, bestätigen Sie diesen Wert mithilfe der Ableitung von p und geben Sie eine Gleichung der Tangente t an.



3 2.2 Untersuchen Sie, ob der Graph von g an der Stelle $x = 1$ einen Knick hat.

3.0 Gegeben ist die Funktion $k: x \mapsto 3e^{-x} + 2$ mit $D_k = \mathbb{R}$.

3 3.1 Bestimmen Sie den Term derjenigen Stammfunktion K von k , deren Graph durch den Koordinatenursprung verläuft.

2 3.2 Der Graph der Funktion $x \mapsto e^x$ wird um 3 Einheiten in positive x -Richtung und anschließend um 1 Einheit in negative y -Richtung verschoben. Geben Sie einen Term der zugehörigen Funktion sowie die Gleichung der waagrechten Asymptote ihres Graphen an.

22

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Ein Spielwürfel aus dem 3D-Drucker wird 1200-mal geworfen. Er zeigt 240-mal eine Sechs (S).

2 **1.1** Geben Sie einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses S an und begründen Sie, warum dieser Schätzwert verlässlich ist.

2 **1.2** Ein Mitschüler meint: „Ein Würfel hat sechs Seiten, also zeigt er mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$ eine Sechs.“ Begründen Sie, dass diese Überlegung nicht zutrifft.

2.0 Bei einer Befragung zu Schlafgewohnheiten geben 40 % der Befragten an, abends am Handy zu sein (M), 50 % gehen nach 23 Uhr ins Bett (A) und auf 20 % trifft beides zu. Eine befragte Person wird zufällig ausgewählt.

	A	$\bar{A}$	Σ
M	0,20		0,40
$\bar{M}$			
Σ	0,50		1

2 **2.1** Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel.

2 **2.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person, die nach 23 Uhr ins Bett geht, abends am Handy ist.

3.0 Eine Pizzeria bietet 8 Beläge an. Eine Party-Pizza ist in drei Bereiche geteilt; auf jeden Bereich kommt genau ein Belag, jeder Belag darf dabei mehrfach vorkommen.

2 **3.1** Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Pizzen und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig belegte Pizza genau mit der Lieblingsbelegung eines Gastes übereinstimmt.

2 **3.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig belegte Pizza drei verschiedene Beläge hat.

12

Musterprüfung Nr. 004 (Nachtermin) zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 2: mit Hilfsmitteln

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Stochastik* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

- 1.0** Eine Zählanlage am Eingang eines Adventsmarkts erfasst, wie viele Besucher pro Stunde ankommen. Der Verlauf von 14 Uhr bis 20 Uhr soll durch die Funktion P mit

$$P(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad D_P = [0; 6]$$

beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Stunden seit 14 Uhr und $P(t)$ die Ankunftsrate in hundert Besuchern pro Stunde. Um 18 Uhr erreicht die Ankunftsrate ihren größten Wert von 800 Besuchern pro Stunde.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 1.1** Bestimmen Sie die Werte von a und b .

[Mögliches Ergebnis: $P(t) = -0,25t^3 + 1,5t^2$]

- 1.2** Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Ankunftsrate am stärksten zunimmt, und geben Sie diese Zunahme an.

- 1.3** Ein Standbetreiber meint: „Weil um 18 Uhr die meisten Besucher pro Stunde ankommen, kommen vor 18 Uhr genauso viele Besucher wie danach.“

Untersuchen Sie, ob diese Aussage zutrifft.

- 1.4** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen von P in ein Koordinatensystem.

Maßstab: 1 h $\hat{=}$ 2 cm; 100 Besucher pro Stunde $\hat{=}$ 1 cm

Verwenden Sie dazu die folgende Wertetabelle.

t	0	1	2	3	4	5	6
$P(t)$							

- 1.5** Berechnen Sie die Anzahl der Besucher, die zwischen 14 Uhr und 20 Uhr ankommen, sowie die mittlere Ankunftsrate in diesem Zeitraum.

- 1.6** Um 20 Uhr meldet die Zählanlage noch 50 ankommende Besucher pro Stunde. Untersuchen Sie, wie gut das Modell den Verlauf am Abend beschreibt, und geben Sie eine Grenze für seine Verwendung an.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 2.0** In einem feuchten Küchenschwamm vermehren sich Keime. Ihre Anzahl wächst modellhaft nach der Funktion N mit

$$N(t) = 3 \cdot e^{k \cdot t}, \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

und $k \in \mathbb{R}^+$. Dabei ist t die Zeit in Stunden und $N(t)$ die Anzahl in Millionen pro Kubikzentimeter. Nach 8 Stunden misst man 12 Millionen Keime pro Kubikzentimeter. Ab 300 Millionen pro Kubikzentimeter gilt der Schwamm als hygienisch bedenklich. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 3 **2.1** Bestimmen Sie den Wert von k . Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

Im Folgenden gilt:

$$N(t) = 3 \cdot e^{0,17 \cdot t}$$

- 3 **2.2** Ermitteln Sie, ab welchem Zeitpunkt die Hälfte dieses Grenzwerts überschritten ist. Runden Sie auf eine Nachkommastelle.

- 3 **2.3** Eine Schülerin meint: „Wenn die Hälfte des Grenzwerts erreicht ist, dauert es noch einmal genauso lange wie bisher, bis der Schwamm hygienisch bedenklich ist.“ Untersuchen Sie diese Aussage.

- 3 **2.4** Berechnen Sie die momentane Änderungsrate der Keimanzahl zum Zeitpunkt $t = 10$ und deuten Sie den Wert im Sachzusammenhang.

- 4 **2.5** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen von N für $0 \leq t \leq 25$ in ein Koordinatensystem.
Maßstab: 5 h $\hat{=}$ 2 cm; 50 Millionen pro Kubikzentimeter $\hat{=}$ 1 cm

- 4 **2.6** Die Anzahl der Keime kann wegen des begrenzten Platzes und der Nährstoffe 1500 Millionen pro Kubikzentimeter nicht überschreiten. Entscheiden Sie anhand des Verhaltens von N für $t \rightarrow \infty$, ob das Modell für beliebig lange Zeiten geeignet ist, und ermitteln Sie, ab welchem Zeitpunkt es sicher nicht mehr gilt.

43

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion

$$g: x \mapsto (x + 2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}, \quad D_g = \mathbb{R}$$

Der Graph von g in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

3 1.1 Ermitteln Sie die Nullstelle von g und das Verhalten der Funktionswerte von g für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow +\infty$.

5 1.2 Ermitteln Sie die Art und die Koordinaten des relativen Extrempunkts von G_g .

[Mögliches Teilergebnis: $g'(x) = -\frac{1}{2}x \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$]

4 1.3 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_g und geben Sie die Koordinaten des Wendepunkts an.

4 1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse G_g für $-2,5 \leq x \leq 6$ in ein Koordinatensystem.

Maßstab für beide Achsen: $1 \text{ LE} \hat{=} 1 \text{ cm}$

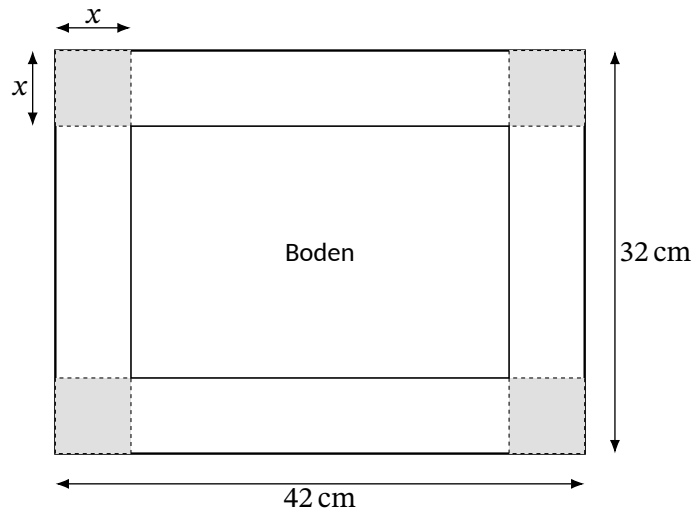
4 1.5 Zeigen Sie, dass $G: x \mapsto -2(x + 4) \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ eine Stammfunktion von g ist, und berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das G_g mit den beiden Koordinatenachsen einschließt.

3 1.6 Ermitteln Sie den Inhalt des Flächenstücks zwischen G_g und dem Graphen der Funktion $x \mapsto 2e^{-\frac{1}{2}x}$ im Bereich $0 \leq x \leq 2$.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 2.0** Aus einem rechteckigen Kartonzuschnitt ($42\text{ cm} \times 32\text{ cm}$) werden an den Ecken gleich große Quadrate der Seitenlänge x (in cm) herausgeschnitten; anschließend werden die Ränder zu einer oben offenen Schachtel hochgefaltet (siehe Skizze, Maßstab 1 : 6).



Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

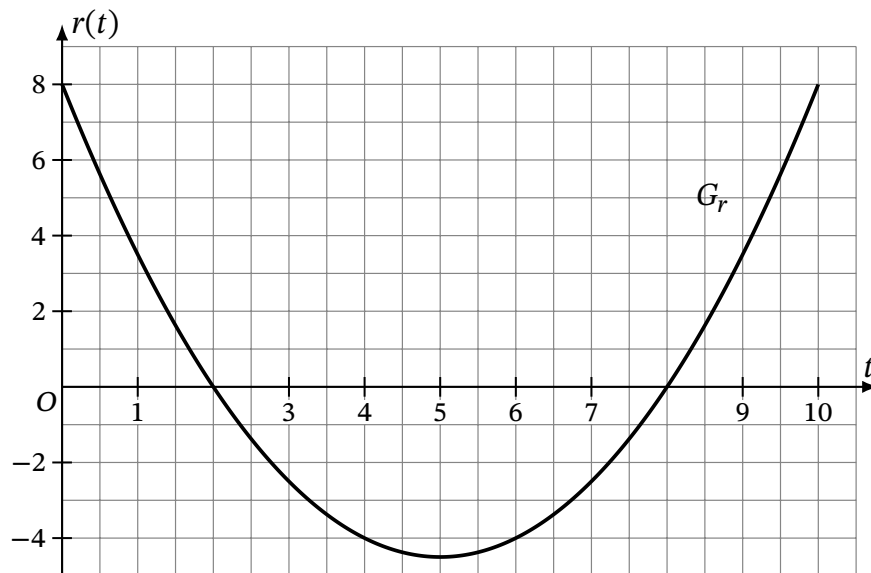
- 2.1** Zeigen Sie, dass für das Volumen der Schachtel gilt: $V(x) = 4x^3 - 148x^2 + 1344x$, und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für V an.
- 2.2** Ermitteln Sie die Abmessungen der Schachtel mit dem größtmöglichen Volumen und geben Sie dieses Volumen an.
- 2.3** Ein Mitarbeiter meint: „Verwendet man einen Zuschnitt mit halber Länge und halber Breite, so halbiert sich auch das größtmögliche Volumen.“ Untersuchen Sie diese Aussage, ohne die Rechnung aus 2.2 zu wiederholen.

BE

- 3.0** Ein Sensor misst die Rate, mit der Wasser in einen Fischteich zu- bzw. aus ihm abfließt. Sie wird für $0 \leq t \leq 10$ durch die Funktion r mit

$$r(t) = \frac{1}{2}t^2 - 5t + 8$$

beschrieben (t in Stunden, $r(t)$ in m^3 pro Stunde; positive Werte: Zufluss, negative Werte: Abfluss). Zu Beginn ($t = 0$) befinden sich 30 m^3 Wasser im Teich. Die Abbildung zeigt den Graphen von r .



- 3.1** Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung und des Terms die Zeiträume, in denen die Wassermenge im Teich zunimmt bzw. abnimmt.
- 3.2** Ermitteln Sie die Wassermenge im Teich nach 10 Stunden.
- 3.3** Ein Nutzer der Sensor-App behauptet: „Nach 8 Stunden war am wenigsten Wasser im Teich.“
Untersuchen Sie diese Behauptung.

43

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 3 **1.0** Bei Rubbellosen eines Kiosks sind 25 % der Lose Gewinnlose. Es gibt so viele Lose, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit beim Kauf mehrerer Lose als konstant angesehen werden kann.
- 4 **1.1** Eine Kundin kauft fünf Lose. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei Lose Gewinnlose sind, sowie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Los ein Gewinnlos ist.
- 4 **1.2** Ermitteln Sie, wie viele Lose man mindestens kaufen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens ein Gewinnlos zu erhalten.
- 4 **1.3** Ein Los kostet 1 €. 75 % der Lose sind Nieten, 20 % gewinnen 2 € und 5 % gewinnen 5 €. Die Zufallsgröße X gibt den Reinerlös des Kiosks pro Los an. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung und den Erwartungswert von X und deuten Sie den Erwartungswert.
- 2.0** 70 % der Loskäufer sind Stammkunden (S), die übrigen Laufkundschaft. Von den Stammkunden kaufen 40 % mehr als ein Los (M), von der Laufkundschaft 10 %. Ein Loskäufer wird zufällig ausgewählt.
- 3 **2.1** Bestimmen Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Loskäufer mehr als ein Los kauft.
- 3 **2.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Loskäufer, der mehr als ein Los kauft, ein Stammkunde ist, und deuten Sie das Ergebnis im Vergleich zu 70 %.
- 3.0** Einige Kunden vermuten, dass weniger als 25 % der Lose Gewinnlose sind (Gegenhypothese). Die Vermutung soll auf einem Signifikanzniveau von 5 % anhand von 50 zufällig gekauften Losen getestet werden.
- 4 **3.1** Entwickeln Sie einen geeigneten Hypothesentest und formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel im Sachzusammenhang.
- 2 **3.2** Unter den 50 gekauften Losen sind 9 Gewinnlose. Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Hinblick auf die Vermutung der Kunden.

23

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0** In einem Jugendzentrum nutzen 55 % der Mitglieder die Werkstatt (W), 40 % das Café (C) und 20 % der Mitglieder nutzen beides.
- 3 1.1** Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel für die Ereignisse W und C .
- 3 1.2** Ein Betreuer meint: „Wer die Werkstatt nutzt, geht häufiger ins Café als die übrigen Mitglieder.“
Untersuchen Sie, ob diese Aussage zutrifft.
- 5 2.1** Der Monatsbeitrag beträgt für Mitglieder, die nur das Café nutzen, 2 €, für Mitglieder, die nur die Werkstatt nutzen, 3 €, für Mitglieder, die beides nutzen, 4 € und für alle übrigen Mitglieder 1 €. Die Zufallsgröße Y gibt den Monatsbeitrag eines zufällig ausgewählten Mitglieds an.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y sowie den Erwartungswert von Y und interpretieren Sie diesen.
- 4 2.2** Das Jugendzentrum möchte den durchschnittlichen Monatsbeitrag pro Mitglied auf 2,70 € erhöhen, indem es nur den Beitrag für Mitglieder ändert, die beides nutzen. Ermitteln Sie diesen neuen Beitrag.
- 4 3** 20 Mitglieder werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße Z gibt die Anzahl derjenigen unter ihnen an, die das Café nicht nutzen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse „Genau 12 nutzen das Café nicht“ und „Mindestens 15 nutzen das Café nicht“. Begründen Sie dabei, dass Z als binomialverteilt angesehen werden kann.
- 4 4** In den Ferien finden sechs verschiedene Workshops statt, darunter Graffiti und Kochen; jeder Workshop wird zufällig auf einen der sechs Tage von Montag bis Samstag gelegt, an jedem Tag genau einer. Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Pläne sowie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Graffiti am Montag und Kochen am Samstag stattfindet.

23