

Musterprüfung Nr. 004 zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 1: ohne Hilfsmittel

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben sämtliche Aufgaben zu bearbeiten.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion

$$f: x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f samt ihrer Vielfachheit.

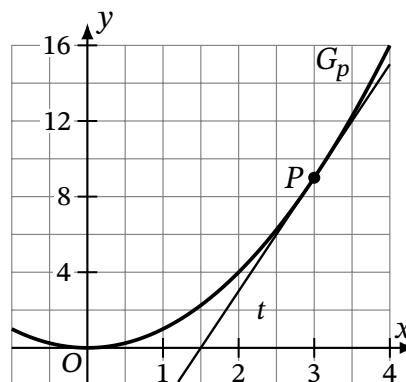
1.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f .

1.3 Die Definitionsmenge von f wird auf $[0; 4]$ eingeschränkt. Ermitteln Sie die Wertemenge der so eingeschränkten Funktion.

2.0 Gegeben sind die Funktionen $p: x \mapsto x^2$ mit $D_p = \mathbb{R}$ und

$$g: x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 2 \\ 3x - 2 & \text{für } x > 2 \end{cases}, \quad D_g = \mathbb{R}$$

2.1 Die Abbildung zeigt den Graphen G_p von p und die Tangente t an G_p im Punkt $P(3 | 9)$. Ermitteln Sie die Steigung von t mithilfe der Abbildung, bestätigen Sie diesen Wert mithilfe der Ableitung von p und geben Sie eine Gleichung der Tangente t an.



2.2 Untersuchen Sie, ob der Graph von g an der Stelle $x = 2$ einen Knick hat.

3.0 Gegeben ist die Funktion $k: x \mapsto 2e^{2x} + 1$ mit $D_k = \mathbb{R}$.

3.1 Bestimmen Sie den Term derjenigen Stammfunktion K von k , deren Graph durch den Koordinatenursprung verläuft.

3.2 Der Graph der Funktion $x \mapsto e^x$ wird an der x -Achse gespiegelt und anschließend um 2 Einheiten in positive y -Richtung verschoben. Geben Sie einen Term der zugehörigen Funktion sowie die Gleichung der waagrechten Asymptote ihres Graphen an.

22

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Ein Kronkorken wird 1000-mal geworfen. Er landet 620-mal mit den Zacken nach oben (Z), sonst mit den Zacken nach unten.

2 **1.1** Geben Sie einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses Z an und begründen Sie, warum dieser Schätzwert verlässlich ist.

2 **1.2** Ein Mitschüler meint: „Der Kronkorken kann nur auf zwei Arten landen, also landet er mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % mit den Zacken nach oben.“ Begründen Sie, dass diese Überlegung nicht zutrifft.

2.0 Bei einer Befragung zu Lerngewohnheiten geben 35 % der Befragten an, beim Lernen Musik zu hören (M), 60 % lernen am liebsten abends (A) und auf 25 % trifft beides zu. Eine befragte Person wird zufällig ausgewählt.

	A	$\bar{A}$	Σ
M	0,25		0,35
$\bar{M}$			
Σ	0,60		1

2 **2.1** Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel.

2 **2.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person, die am liebsten abends lernt, beim Lernen Musik hört.

3.0 Eine Eisdiele bietet 10 Eissorten an. Für einen Eisbecher werden drei Kugeln nacheinander auf drei nummerierte Plätze gesetzt; jede Sorte darf dabei mehrfach vorkommen.

2 **3.1** Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Eisbecher und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig zusammengestellter Becher genau mit der Lieblingsbelegung eines Kunden übereinstimmt.

2 **3.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig zusammengestellter Becher drei verschiedene Sorten enthält.

12

Musterprüfung Nr. 004 zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 2: mit Hilfsmitteln

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Stochastik* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

- 1.0** Die App einer Solaranlage zeichnet an einem sonnigen Tag die Leistung der Anlage auf. Der Verlauf von 6 Uhr bis 18 Uhr soll durch die Funktion P mit

$$P(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad D_P = [0; 12]$$

beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Stunden seit 6 Uhr und $P(t)$ die Leistung in Kilowatt (kW). Um 14 Uhr erreicht die Leistung ihren größten Wert von 12,8 kW. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 1.1** Bestimmen Sie die Werte von a und b .
[Mögliches Ergebnis: $P(t) = -0,05t^3 + 0,6t^2$]
- 1.2** Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Leistung am stärksten zunimmt, und geben Sie diese Zunahme in kW pro Stunde an.
- 1.3** Ein Nutzer meint: „Weil die Leistung um 14 Uhr am größten ist, liefert die Anlage vor 14 Uhr genauso viel Energie wie danach.“
Untersuchen Sie, ob diese Aussage zutrifft.
- 1.4** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen von P in ein Koordinatensystem.
Maßstab: 1 h $\hat{=}$ 1 cm; 2 kW $\hat{=}$ 1 cm

Verwenden Sie dazu die folgende Wertetabelle.

t	0	2	4	6	8	10	12
$P(t)$							

- 1.5** Berechnen Sie die Energie in Kilowattstunden (kWh), die die Anlage an diesem Tag zwischen 6 Uhr und 18 Uhr liefert, sowie die mittlere Leistung in diesem Zeitraum.
- 1.6** Um 18 Uhr zeigt die App noch eine Leistung von 0,4 kW an. Untersuchen Sie, wie gut das Modell den Verlauf am Abend beschreibt, und geben Sie eine Grenze für seine Verwendung an.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 2.0** Eine Packung Milch wurde außerhalb des Kühlschranks vergessen. Die Anzahl der Milchsäurebakterien pro Milliliter wächst modellhaft nach der Funktion N mit

$$N(t) = 2 \cdot e^{k \cdot t}, \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

und $k \in \mathbb{R}^+$. Dabei ist t die Zeit in Stunden und $N(t)$ die Anzahl in Millionen pro Milliliter. Nach 10 Stunden misst man 6 Millionen Bakterien pro Milliliter. Ab 200 Millionen pro Milliliter gilt die Milch als verdorben.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 3 **2.1** Bestimmen Sie den Wert von k . Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

Im Folgenden gilt:

$$N(t) = 2 \cdot e^{0,11 \cdot t}$$

- 3 **2.2** Ermitteln Sie, ab welchem Zeitpunkt die Hälfte des Grenzwerts für verdorbene Milch überschritten ist. Runden Sie auf eine Nachkommastelle.

- 3 **2.3** Eine Schülerin meint: „Wenn die Hälfte des Grenzwerts erreicht ist, dauert es noch einmal genauso lange wie bisher, bis die Milch verdorben ist.“
Untersuchen Sie diese Aussage.

- 3 **2.4** Berechnen Sie die momentane Änderungsrate der Bakterienanzahl zum Zeitpunkt $t = 20$ und deuten Sie den Wert im Sachzusammenhang.

- 4 **2.5** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen von N für $0 \leq t \leq 40$ in ein Koordinatensystem.
Maßstab: 5 h $\hat{=}$ 1 cm; 20 Millionen pro Milliliter $\hat{=}$ 1 cm

- 4 **2.6** Die Anzahl der Bakterien kann wegen der begrenzten Nährstoffe 1000 Millionen pro Milliliter nicht überschreiten. Entscheiden Sie anhand des Verhaltens von N für $t \rightarrow \infty$, ob das Modell für beliebig lange Zeiten geeignet ist, und ermitteln Sie, ab welchem Zeitpunkt es sicher nicht mehr gilt.

43

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion

$$g: x \mapsto (x + 1) \cdot e^{-x}, \quad D_g = \mathbb{R}$$

Der Graph von g in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_g bezeichnet.

3 1.1 Ermitteln Sie die Nullstelle von g und das Verhalten der Funktionswerte von g für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow +\infty$.

5 1.2 Ermitteln Sie die Art und die Koordinaten des relativen Extrempunkts von G_g .
[Mögliches Teilergebnis: $g'(x) = -x \cdot e^{-x}$]

4 1.3 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_g und geben Sie die Koordinaten des Wendepunkts an.

4 1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse G_g für $-1,3 \leq x \leq 4$ in ein Koordinatensystem.
Maßstab für beide Achsen: $1 \text{ LE} \hat{=} 2 \text{ cm}$

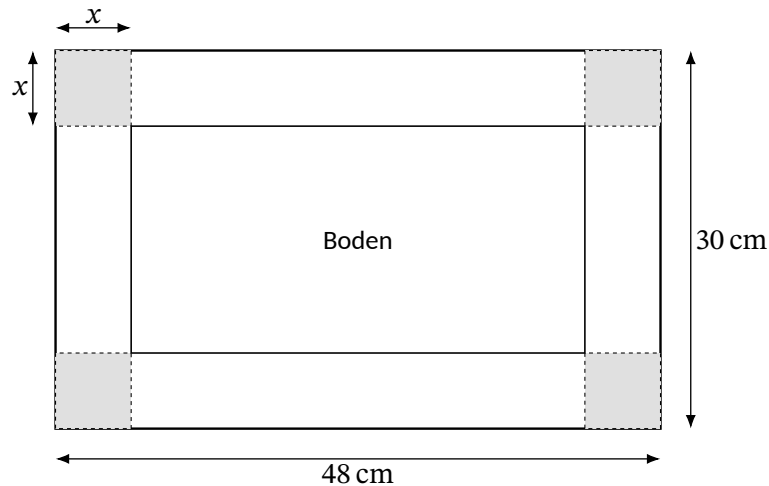
4 1.5 Zeigen Sie, dass $G: x \mapsto -(x + 2) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von g ist, und berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das G_g mit den beiden Koordinatenachsen einschließt.

3 1.6 Ermitteln Sie den Inhalt des Flächenstücks zwischen G_g und dem Graphen der Funktion $x \mapsto e^{-x}$ im Bereich $0 \leq x \leq 2$.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 2.0** Aus einem rechteckigen Blech ($48\text{ cm} \times 30\text{ cm}$) werden an den Ecken gleich große Quadrate der Seitenlänge x (in cm) herausgeschnitten; anschließend werden die Ränder zu einer oben offenen Schachtel hochgebogen (siehe Skizze, Maßstab 1 : 6).



Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

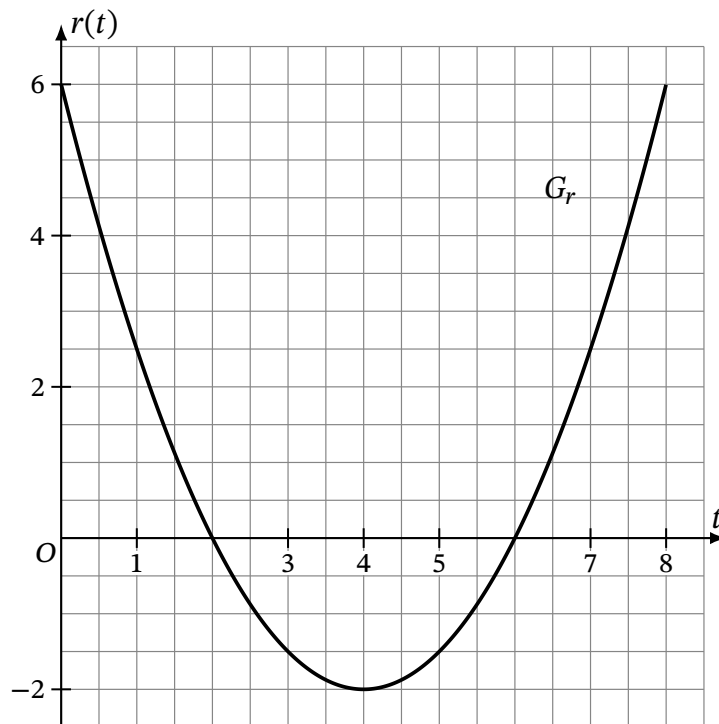
- 2.1** Zeigen Sie, dass für das Volumen der Schachtel gilt: $V(x) = 4x^3 - 156x^2 + 1440x$, und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für V an.
- 2.2** Ermitteln Sie die Abmessungen der Schachtel mit dem größtmöglichen Volumen und geben Sie dieses Volumen an.
- 2.3** Ein Mitarbeiter meint: „Verwendet man ein Blech mit doppelter Länge und doppelter Breite, so verdoppelt sich auch das größtmögliche Volumen.“ Untersuchen Sie diese Aussage, ohne die Rechnung aus 2.2 zu wiederholen.

BE

- 3.0** Ein Sensor misst die Rate, mit der Wasser in einen Gartenpool zu- bzw. aus ihm abfließt. Sie wird für $0 \leq t \leq 8$ durch die Funktion r mit

$$r(t) = \frac{1}{2}t^2 - 4t + 6$$

beschrieben (t in Stunden, $r(t)$ in m^3 pro Stunde; positive Werte: Zufluss, negative Werte: Abfluss). Zu Beginn ($t = 0$) befinden sich 20 m^3 Wasser im Pool. Die Abbildung zeigt den Graphen von r .



- 3.1** Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung und des Terms die Zeiträume, in denen die Wassermenge im Pool zunimmt bzw. abnimmt.
- 3.2** Ermitteln Sie die Wassermenge im Pool nach 8 Stunden.
- 3.3** Ein Nutzer der Sensor-App behauptet: „Nach 6 Stunden war am wenigsten Wasser im Pool.“
Untersuchen Sie diese Behauptung.

43

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0** Bei der Tombola eines Schulfests sind 30 % der Lose Gewinnlose. Die Lostrommel enthält so viele Lose, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit beim Ziehen mehrerer Lose als konstant angesehen werden kann.
- 3 1.1** Eine Besucherin kauft fünf Lose. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau zwei Lose Gewinnlose sind, sowie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens ein Los ein Gewinnlos ist.
- 4 1.2** Ermitteln Sie, wie viele Lose man mindestens kaufen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens ein Gewinnlos zu erhalten.
- 4 1.3** Ein Los kostet 2 €. 70 % der Lose sind Nieten, 25 % gewinnen einen Trostpreis im Einkaufswert von 1 € und 5 % einen Hauptpreis im Einkaufswert von 10 €. Die Zufallsgröße X gibt den Reinerlös der Veranstalter pro Los an. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung und den Erwartungswert von X und deuten Sie den Erwartungswert.
- 2.0** 60 % der Loskäufer sind Schülerinnen und Schüler (S), die übrigen Erwachsene. Von den Schülerinnen und Schülern kauft die Hälfte mehr als ein Los (M), von den Erwachsenen 20 %. Ein Loskäufer wird zufällig ausgewählt.
- 3 2.1** Bestimmen Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Loskäufer mehr als ein Los kauft.
- 3 2.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Loskäufer, der mehr als ein Los kauft, eine Schülerin oder ein Schüler ist, und deuten Sie das Ergebnis im Vergleich zu 60 %.
- 3.0** Einige Besucher vermuten, dass weniger als 30 % der Lose Gewinnlose sind (Gegenhypothese). Die Vermutung soll auf einem Signifikanzniveau von 5 % anhand von 50 zufällig gezogenen Losen getestet werden.
- 4 3.1** Entwickeln Sie einen geeigneten Hypothesentest und formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel im Sachzusammenhang.
- 2 3.2** Unter den 50 gezogenen Losen sind 8 Gewinnlose. Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Hinblick auf die Vermutung der Besucher.

23

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0** In einer Stadtbibliothek leihen 45 % der Mitglieder E-Books aus (E), 70 % leihen gedruckte Bücher aus (B) und 30 % der Mitglieder tun beides.
- 3 1.1** Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel für die Ereignisse E und B .
- 3 1.2** Eine Bibliothekarin meint: „Wer E-Books ausleiht, leiht seltener gedruckte Bücher aus als die übrigen Mitglieder.“
Untersuchen Sie, ob diese Aussage zutrifft.
- 5 2.1** Die Monatsgebühr beträgt für Mitglieder, die nur gedruckte Bücher ausleihen, 5 €, für Mitglieder, die nur E-Books ausleihen, 6 €, für Mitglieder, die beides nutzen, 9 € und für alle übrigen Mitglieder 4 €. Die Zufallsgröße Y gibt die Monatsgebühr eines zufällig ausgewählten Mitglieds an.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y sowie den Erwartungswert von Y und interpretieren Sie diesen.
- 4 2.2** Die Bibliothek möchte die durchschnittliche Monatsgebühr pro Mitglied auf 6,50 € erhöhen, indem sie nur die Gebühr für Mitglieder ändert, die beides nutzen. Ermitteln Sie diese neue Gebühr.
- 4 3** 20 Mitglieder werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße Z gibt die Anzahl derjenigen unter ihnen an, die gedruckte Bücher ausleihen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse „Genau 14 leihen gedruckte Bücher aus“ und „Mindestens 16 leihen gedruckte Bücher aus“. Begründen Sie dabei, dass Z als binomialverteilt angesehen werden kann.
- 4 4** In einer Woche finden fünf verschiedene Lesungen statt, darunter ein Krimi und ein Gedichtabend; jede Lesung wird zufällig auf einen der fünf Abende von Montag bis Freitag gelegt, an jedem Abend genau eine. Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Pläne sowie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Krimi am Montag und der Gedichtabend am Freitag stattfindet.

23