

- Lösungshinweise -

Musterprüfung Nr. 005 (Nachtermin) zum Fachabitur
 zum Erwerb der Fachhochschulreife
 an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Notenschlüssel:

Note	Punkte	Bewertungseinheiten	
		von	bis
+	15	100	96
1	14	95	91
–	13	90	86
+	12	85	81
2	11	80	76
–	10	75	71
+	9	70	66
3	8	65	61
–	7	60	56
+	6	55	51
4	5	50	46
–	4	45	41
+	3	40	34
5	2	33	27
–	1	26	20
6	0	19	0

Ergibt die Gesamtsumme der Bewertungseinheiten **n,5**,
 so wird einmalig zugunsten des Prüflings aufgerundet.

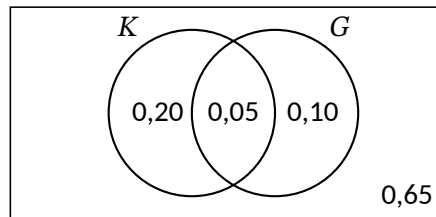
BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 1 - A -	
2	1.1	Im Term kommen nur gerade Exponenten vor: $f(-x) = f(x)$, G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse. $f(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow -\infty$ und für $x \rightarrow +\infty$
3	1.2	$f(x) = (x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2(x + 1)^2$ $x_{1;2} = -1$ und $x_{3;4} = 1$ (jeweils doppelte Nullstellen, ± 1)
4	1.3	$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x - 1)(x + 1)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = \pm 1$ Vorzeichen von f' : – für $x < -1$, + für $-1 < x < 0$, – für $0 < x < 1$, + für $x > 1$ $\Rightarrow$ Tiefpunkte $T_1(-1 0)$, $T_2(1 0)$, Hochpunkt $H(0 1)$
3	1.4	$f(2) = 16 - 8 + 1 = 9$; $f'(2) = 32 - 8 = 24$ Tangente: $y = 24(x - 2) + 9$, also $y = 24x - 39$
3	2.1	$f'(x) = 0$ an den Stellen -1 und 3 (Schnittpunkte von $G_{f'}$ mit der x-Achse). Bei $x = -1$ wechselt f' das Vorzeichen von – nach +: Tiefpunkt; bei $x = 3$ von + nach –: Hochpunkt. <i>Bewertung:</i> 1 BE Stellen, 1 BE Vorzeichenwechsel, 1 BE Art.
2	2.2	Der Graph von f steigt am stärksten, wo f' den größten Wert hat: im Hochpunkt von $G_{f'}$, also an der Stelle $x = 1$ ($f'(1) = 4$). <i>Bewertung:</i> 1 BE Zusammenhang Steigung von G_f = Wert von f' , 1 BE Stelle.
2	3.1	$G(x) = x^3 - 6x^2 + C$; $G(2) = 8 - 24 + C = 0 \Rightarrow C = 16$: $G(x) = x^3 - 6x^2 + 16$
3	3.2	$g(x) = 3x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 4$ $\int_0^4 g(x) dx = [x^3 - 6x^2]_0^4 = 64 - 96 = -32$: Flächeninhalt 32 (FE)
22		

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 1 - S -

2 **1.1** $\Omega = \{S; NS; NNS; NNN\}$ (nach einer Sechs wird nicht weiter gewürfelt)

2 **1.2** $P(\{S; NS\}) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{6}{36} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$



2 **2.1**

2 **2.2** $P(\text{genau ein Instrument}) = 0,20 + 0,10 = 0,30$

2 **3.1** Jedes Feld hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$: $E(\text{Auszahlung}) = \frac{1+1+4+6}{4} = 3$ (in €)

Die zu erwartende Auszahlung ist gleich dem Einsatz von 3 €, der zu erwartende Gewinn ist 0: Das Spiel ist fair.

2 **3.2** Günstig: Eine der Auszahlungen wird größer, die übrigen und der Einsatz bleiben gleich; die zu erwartende Auszahlung steigt über 3 €, der zu erwartende Gewinn wird positiv.

Bewertung: 1 BE Entscheidung, 1 BE Begründung ohne Rechnung.

12

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I -

3 **1.1** Halbwertszeit: $c(2) = 10 \Rightarrow 20 e^{-2k} = 10 \Rightarrow e^{-2k} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{2} \approx 0,35$

3 **1.2** $20 e^{-0,35t} < 5 \Rightarrow e^{-0,35t} < 0,25 \Rightarrow -0,35t < \ln(0,25) \Rightarrow t > \frac{\ln(4)}{0,35} \approx 4,0$

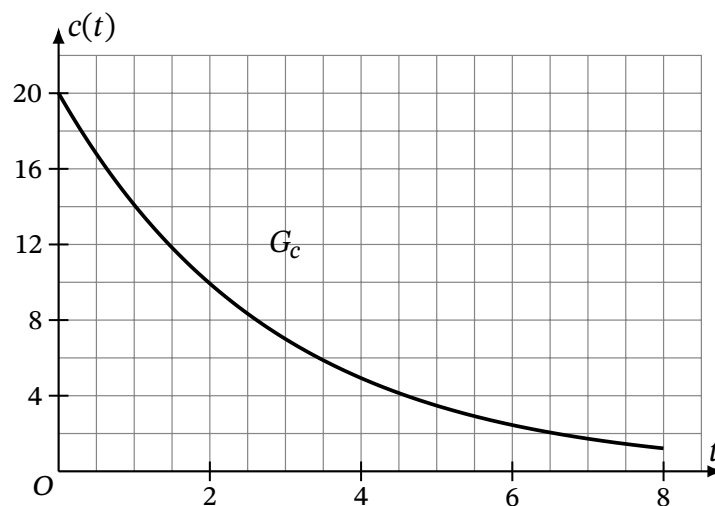
Nach etwa 4,0 Stunden liegt die Konzentration unter 5 Milligramm pro Liter.

4 **1.3** $\dot{c}(t) = -7 e^{-0,35t}$; $\dot{c}(0) = -7,0$; $\dot{c}(2) = -7 e^{-0,7} \approx -3,5$ (in mg/l pro Stunde)

Unmittelbar nach der Einnahme nimmt die Konzentration momentan um 7,0 mg/l pro Stunde ab, nach 2 Stunden nur noch um etwa 3,5 mg/l pro Stunde: Der Abbau wird mit sinkender Konzentration langsamer.

4 **1.4**

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$c(t)$	20	14,09	9,93	7,00	4,93	3,48	2,45	1,73	1,22



3 **1.5** $c(1) = 20 e^{-0,35} \approx 14,1$: Nach einer Stunde sind noch etwa 70 % (nicht 75 %) vorhanden.

Die Aussage ist falsch: Die Abnahme ist nicht linear. In jeder Stunde wird derselbe Anteil abgebaut; in zwei Stunden bleibt die Hälfte, also in einer Stunde der Anteil $\sqrt{0,5} \approx 0,71$ – nicht die Mitte zwischen 1 und 0,5.

Bewertung: volle BE nur mit Begründung über die gleichbleibende prozentuale Abnahme.

4 **1.6** Für $t \geq 6$: $c_2(t) = 20 e^{-0,35t} + 20 e^{-0,35(t-6)}$

Unmittelbar nach der zweiten Tablette: $c_2(6) = 20 e^{-2,1} + 20 \approx 22,4$ (in mg/l)

6 Stunden später: $c_2(12) = 20 e^{-4,2} + 20 e^{-2,1} \approx 2,75 < 5$: Die Konzentration liegt dann unter 5 mg/l.

Annahmen: Der Wirkstoff wird jeweils sofort vollständig aufgenommen und beide Anteile werden unabhängig voneinander mit derselben Halbwertszeit abgebaut (Überlagerung durch Addition).

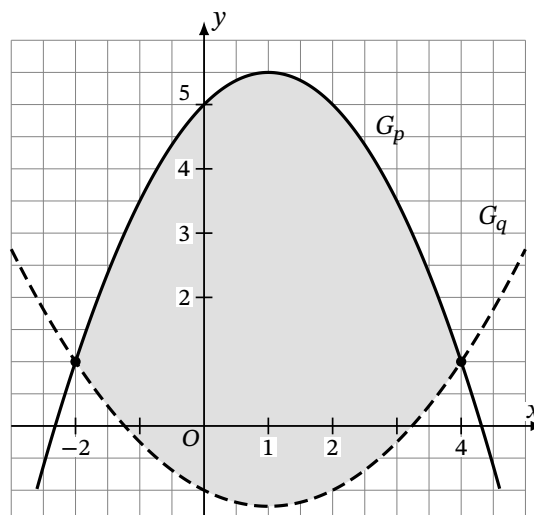
Bewertung: 1 BE Modellterm, 1 BE Wert nach der 2. Tablette, 1 BE Vergleich, 1 BE Annahme.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I - (Fortsetzung)

- 4 **2.1** $-\frac{1}{2}x^2 + x + 5 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$
 $\Leftrightarrow -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ oder } x = 4$
 $p(-2) = 1, p(4) = 1$: Schnittpunkte $S_1(-2 | 1)$ und $S_2(4 | 1)$, also $(-2|1)$ und $(4|1)$
- 2 **2.2** Auszählen der Kästchen (je $0,25 \text{ m}^2$, etwa 108 Kästchen) oder Näherung durch Dreiecke/Trapeze: etwa 27 m^2 .
Bewertung: Werte zwischen 25 m^2 und 29 m^2 mit nachvollziehbarem Vorgehen sind zu akzeptieren.
- 5 **2.3** Differenzfunktion: $d(x) = p(x) - q(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 6$ (≥ 0 auf $[-2; 4]$)
 $\int_{-2}^4 d(x) dx = \left[-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 6x \right]_{-2}^4 = 20 - (-7) = 27$
Der Garten ist 27 m^2 groß; Kosten: $27 \cdot 15 \text{ €} = 405 \text{ €}$.
- 4 **2.4** Breite in y-Richtung an der Stelle x : $d(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 6$
 $d'(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x = 1$; $d''(x) = -\frac{3}{2} < 0$: Maximum
 $d(1) = -0,75 + 1,5 + 6 = 6,75$: An der Stelle $x = 1$ ist der Garten am breitesten, nämlich $6,75 \text{ m}$.
- 3 **2.5** Hier trifft es zu: $p'(x) = -x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$; der obere Weg hat seinen höchsten Punkt ebenfalls bei $x = 1$.
Das ist Zufall: Auch q hat bei $x = 1$ seinen Scheitel (Tiefpunkt), der untere Weg liegt dort am tiefsten.
Allgemein gilt die Aussage nicht: Die Breite ist $d = p - q$, ihr Maximum hängt auch von q ab (z. B. bei einem steigenden unteren Weg).
Bewertung: 1 BE Bestätigung, 1 BE Begründung über $d = p - q$, 1 BE Grenze der Verallgemeinerung.
- 4 **2.6** Wertetabellen z. B. p : $(-2,5 | -0,625), (0 | 5), (1 | 5,5), (3 | 2,5)$; q : $(-2,5 | 1,8), (1 | -1,25), (4,5 | 1,8)$



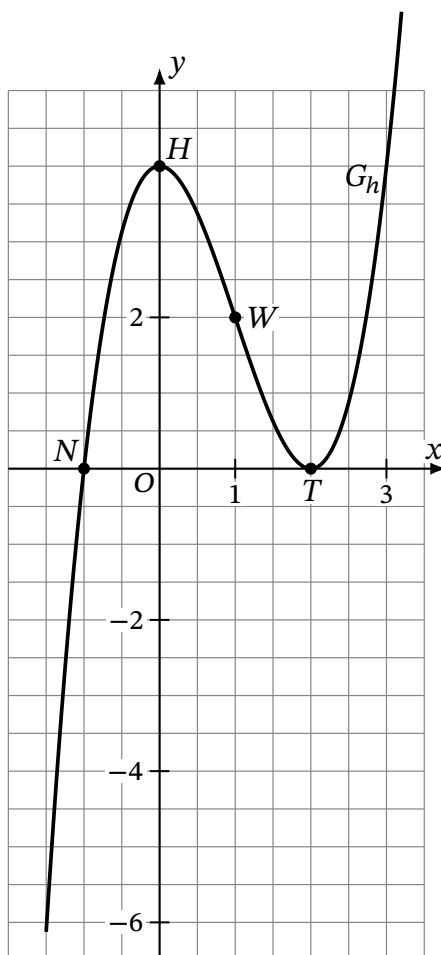
BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A II -

- 3 **1.1** $h(-1) = -1 - 3 + 4 = 0$; Polynomdivision bzw. Faktorisieren:
 $h(x) = (x + 1)(x^2 - 4x + 4) = (x + 1)(x - 2)^2$
 $x_1 = -1$ (einfache Nullstelle); $x_{2,3} = 2$ (doppelte Nullstelle)
- 4 **1.2** $h'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$; $h'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 2$
 Vorzeichen von h' : + für $x < 0$, – für $0 < x < 2$, + für $x > 2$
 $\Rightarrow$ Hochpunkt $H(0 | 4)$, Tiefpunkt $T(2 | 0)$
- 4 **1.3** $h''(x) = 6x - 6$; $h''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
 $h''(x) < 0$ für $x < 1$: G_h rechtsgekrümmt; $h''(x) > 0$ für $x > 1$: G_h linksgekrümmt
 $h(1) = 1 - 3 + 4 = 2$: Wendepunkt $W(1 | 2)$

4 **1.4**

x	-1,5	-1	0	1	2	2,5	3	3,2
$h(x)$	-6,13	0	4	2	0	0,88	4	5,97



Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A II - (Fortsetzung)

- 4 **1.5** Graph von h' : h' hat Nullstellen bei 0 und 2 (Extremstellen von h) und ist dazwischen negativ, weil G_h von H nach T fällt – das trifft auf Graph II zu (Graph I hat dort positive Werte).
Stammfunktion H : $H' = h \geq 0$ für $x \geq -1$, also fällt H bis $x = -1$ und steigt danach (Tiefpunkt bei -1); bei $x = 2$ hat h eine doppelte Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel, H dort einen Terrassenpunkt – das zeigt Graph III.
Bewertung: je 2 BE für jede begründete Zuordnung.
- 4 **1.6** G_h schließt mit der x -Achse auf $[-1; 2]$ ein Flächenstück ein, dort ist $h(x) \geq 0$:

$$\int_{-1}^2 h(x) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x \right]_{-1}^2 = 4 - \left(-\frac{11}{4} \right) = \frac{27}{4} = 6,75 \text{ (FE)}$$
- 3 **2.1** Breite des Gitters $2u$, Höhe $k(u) = 3 - \frac{1}{4}u^2$

$$A(u) = 2u \left(3 - \frac{1}{4}u^2 \right) = 6u - \frac{1}{2}u^3$$

 Sinnvoll: $u > 0$ und $k(u) > 0$, also $D_A =]0; \sqrt{12}[$
- 5 **2.2** $A'(u) = 6 - \frac{3}{2}u^2 = 0 \Rightarrow u = 2$ ($u > 0$); $A''(u) = -3u$, $A''(2) < 0$: Maximum
 Breite 4 m, Höhe $k(2) = 3 - 1 = 2$ m
 $A(2) = 12 - 4 = 8$ (in m^2)
- 3 **2.3** Fährt das Boot mittig, liegen seine Seitenkanten bei $x = \pm 1,0$.
 $k(1) = 3 - \frac{1}{4} = 2,75$ (in m) $> 2,5$: Auch an den Seitenkanten bleiben 25 cm Platz.
 Die Aussage trifft zu – aber nicht wegen der Höhe in der Mitte (3 m), sondern weil der Bogen auch am Rand des Boots noch hoch genug ist.
Bewertung: 1 BE Randstelle, 1 BE Vergleich, 1 BE Urteil mit Begründung über den Rand.
- 3 **3.1** $s'(t) = -0,0375t^2 + 1,2t$; $s'(8) = 7,2$
 Am 8. Tag wächst die Maispflanze nach dem Modell momentan um 7,2 Zentimeter pro Tag.
- 3 **3.2** $s'(t) = 7,2 \Leftrightarrow t^2 - 32t + 192 = 0 \Leftrightarrow t = 8$ oder $t = 24$
 Beide Zeitpunkte liegen im Definitionsbereich: Am 8. und am 24. Tag wächst die Maispflanze momentan gleich schnell (vor und nach der stärksten Wachstumsphase).
- 3 **3.3** $s'(t) = -0,0375 t(t - 32) < 0$ für $t > 32$: Die Höhe würde nach dem 32. Tag abnehmen; z. B. wäre $s(48) = 0$.
 Das widerspricht der Wirklichkeit (die Pflanze schrumpft nicht): Das Modell ist nur bis zum 32. Tag (Wachstumsende) geeignet.

43

BE

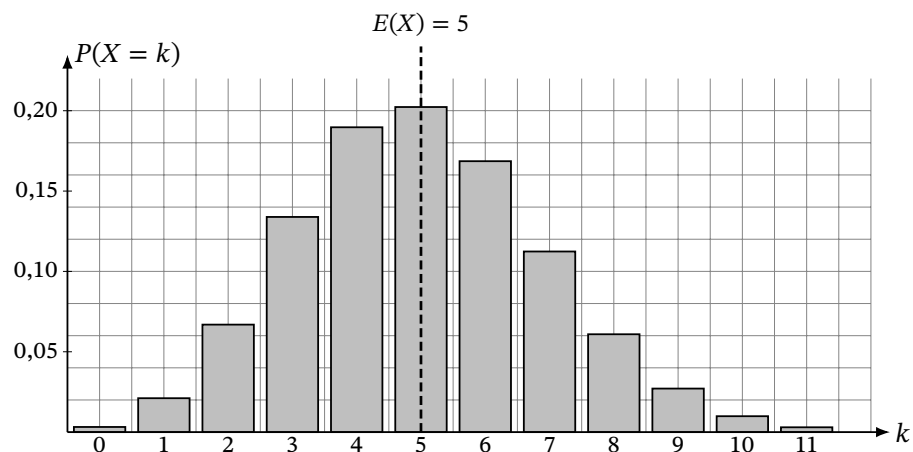
- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S I -

3 1.1 $X \sim B(20; 0,25)$

$$P(X = 5) = B(20; 0,25; 5) = 0,20233$$

$$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - 0,89819 = 0,10181$$

4 1.2 Summe der Säulenhöhen bei $k = 4, 5, 6$: $\approx 0,190 + 0,202 + 0,169 \approx 0,56$ (exakt 0,56063)
 Erwartungswert $E(X) = n p = 20 \cdot 0,25 = 5$: Er liegt bei der höchsten Säule, um die sich die Verteilung konzentriert.



Bewertung: Ablesewerte zwischen 0,54 und 0,58 sind zu akzeptieren.

4 1.3 Vertrag A: $3,00 \text{ €} + 0,04 \cdot 50 \text{ €} = 5,00 \text{ €}$ pro Ausleihe

Vertrag B: $4,00 \text{ €} + 0,01 \cdot 50 \text{ €} = 4,50 \text{ €}$ pro Ausleihe

Vertrag B ist im Mittel um 50 Cent pro Ausleihe günstiger, obwohl er pro Ausleihe mehr kostet; dazu kommen weniger verärgerte Kunden durch Ausfälle.

3 2.1

	L	$\bar{L}$	Σ
E	0,12	0,28	0,40
$\bar{E}$	0,06	0,54	0,60
Σ	0,18	0,82	1

3 2.2 $P_L(E) = \frac{0,12}{0,18} \approx 0,667$

Zwei Drittel der Ausleihen über mehr als einen Tag betreffen E-Bikes, obwohl E-Bikes nur 40 % der Ausleihen ausmachen: E-Bikes werden überdurchschnittlich oft länger ausgeliehen.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S I - (Fortsetzung)	
4	3.1 Testgröße X : Anzahl der Rückgaben mit Mangel unter 100; $X \sim B(100; p)$ $H_0 : p \geq 0,25; \quad H_1 : p < 0,25; \quad \text{Ablehnungsbereich } \bar{A} = \{0; \dots; k\}$ $P_{0,25}(X \leq k) \leq 0,05:$ $P(X \leq 17) = 0,03763, \quad P(X \leq 18) = 0,06301 \Rightarrow k = 17$ Entscheidungsregel: Wird bei höchstens 17 der 100 Rückgaben ein Mangel gemeldet, wird H_0 abgelehnt und die Vermutung des Verleihs als gestützt angesehen; sonst nicht.	
2	3.2 16 liegt im Ablehnungsbereich: H_0 wird abgelehnt, die Vermutung des Verleihs ist durch den Test gestützt. Sicher ist sie damit nicht: Die Wahrscheinlichkeit, H_0 irrtümlich abzulehnen, beträgt aber höchstens 5 %.	
23		

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S II -

- 2 **1.1** a) Zufallsexperiment: Ausgang ungewiss, unter gleichen Bedingungen wiederholbar.
 b) Kein Zufallsexperiment: Der Preis steht fest. c) Zufallsexperiment: Auch eine geübte Werferin trifft nicht sicher (aber nicht Laplace).

Bewertung: 1 BE für zwei richtige, 2 BE für drei richtige Entscheidungen mit Begründung.

3 **1.2**

	B	$\bar{B}$	Σ
K	0,20	0,15	0,35
$\bar{K}$	0,30	0,35	0,65
Σ	0,50	0,50	1

- 3 **1.3** $P_K(B) = \frac{0,20}{0,35} \approx 0,571$; $P_{\bar{K}}(B) = \frac{0,30}{0,65} \approx 0,462$

Die Aussage trifft zu: Von den Kindern nutzen etwa 57 % das Kuchenbuffet, von den übrigen Besuchern nur etwa 46 % – obwohl absolut weniger Kinder (0,20) als übrige Besucher (0,30) das Buffet nutzen.

Bewertung: volle BE nur bei Vergleich bedingter Wahrscheinlichkeiten (nicht nur 0,20 mit 0,30).

4 **2.1**

x in €	8	2	-2
$P(X = x)$	0,05	0,25	0,7

$$E(X) = 8 \cdot 0,05 + 2 \cdot 0,25 + (-2) \cdot 0,7 = -0,50$$

Auf lange Sicht verliert ein Spieler im Mittel 0,50 € pro Spiel (Einnahme für den Stand).

- 3 **2.2** Mit der Auszahlung a für den Hauptpreis: $0,05(a - 2) + 0,25 \cdot 2 + 0,7 \cdot (-2) = 0$
 $0,05a - 1 = 0 \Rightarrow a = 20$: Die Auszahlung müsste 20 € betragen.

- 4 **3** 25 Besucher, jeweils Treffer „Kind“ mit $p = 0,35$; bei vielen Besuchern ist die Auswahl annähernd unabhängig und p konstant: $Z \sim B(25; 0,35)$

$$P(Z = 9) = B(25; 0,35; 9) = 0,16349;$$

$$P(Z \geq 11) = 1 - P(Z \leq 10) = 1 - 0,77116 = 0,22884$$

- 4 **4** Ergebnisraum: $\{T; NT; NNT; NNN\}$

$$P(NT) = 0,25 \cdot 0,75 = 0,1875$$

$$P(NNN) = 0,25^3 \approx 0,0156$$

23