

Musterprüfung Nr. 005 (Nachtermin) zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 1: ohne Hilfsmittel

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben sämtliche Aufgaben zu bearbeiten.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

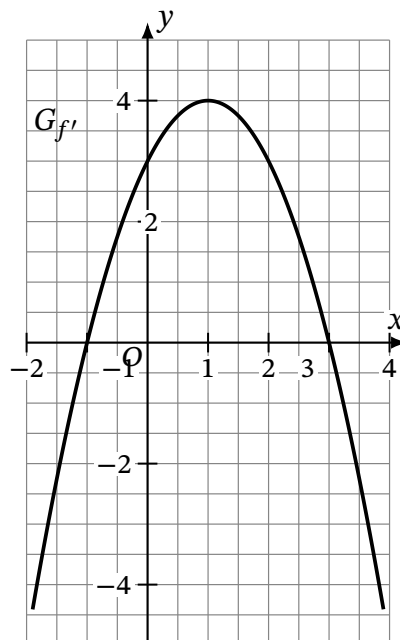
1.0 Gegeben ist die Funktion

$$f: x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

- 2 1.1 Untersuchen Sie G_f auf Symmetrie zum Koordinatensystem und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \rightarrow \pm\infty$ an.
- 3 1.2 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f samt ihrer Vielfachheit.
- 4 1.3 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f .
- 3 1.4 Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an G_f im Punkt $P(2 \mid f(2))$.

2.0 Die Abbildung zeigt den Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion f .



- 3 2.1 Geben Sie mithilfe der Abbildung die Stellen an, an denen der Graph von f relative Extrempunkte hat, sowie deren Art, und begründen Sie Ihre Angabe.
- 2 2.2 Begründen Sie mithilfe der Abbildung, an welcher Stelle der Graph von f am stärksten steigt.
- 3.0 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto 3x^2 - 12x$ mit $D_g = \mathbb{R}$.
- 2 3.1 Bestimmen Sie den Term derjenigen Stammfunktion G von g , für die $G(2) = 0$ gilt.
- 3 3.2 Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von g mit der x -Achse einschließt.

22

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 2 **1.0** Bei einem Brettspiel darf man erst starten, wenn man mit einem Laplace-Würfel eine Sechs wirft. Ein Kind würfelt so lange, bis eine Sechs fällt, höchstens aber dreimal (Sechs S, keine Sechs N).
- 2 **1.1** Geben Sie einen Ergebnisraum dieses Zufallsexperiments an.
- 2 **1.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Kind höchstens zwei Würfe benötigt.
- 2.0** An einer Musikschule lernen 25 % der Schülerinnen und Schüler Klavier (K), 15 % Gitarre (G) und 5 % beide Instrumente. Eine Person wird zufällig ausgewählt.
- 2 **2.1** Vervollständigen Sie ein Venn-Diagramm der Ereignisse K und G , indem Sie für jede Teilfläche die zugehörige Wahrscheinlichkeit eintragen.
- 2 **2.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Person genau eines der beiden Instrumente lernt.
- 3.0** Eine Drehscheibe hat vier gleich große Felder mit den Aufschriften 1 €, 1 €, 4 € und 6 €. Nach dem Drehen wird der Betrag des Felds ausgezahlt, auf das der Zeiger zeigt. Ein Spiel kostet 3 € Einsatz.
- 2 **3.1** Zeigen Sie, dass das Spiel fair ist.
- 2 **3.2** Eine der Aufschriften 1 € wird durch 2 € ersetzt, der Einsatz bleibt gleich. Entscheiden Sie ohne Rechnung, ob das Spiel dann für den Spieler günstig oder ungünstig ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

12

Musterprüfung Nr. 005 (Nachtermin) zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 2: mit Hilfsmitteln

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Stochastik* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

- 1.0** Eine Gesundheits-App schätzt nach der Einnahme einer Schmerztablette die Wirkstoffkonzentration im Blut mithilfe der Funktion c mit

$$c(t) = 20 \cdot e^{-k \cdot t}, \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

und $k \in \mathbb{R}^+$. Dabei ist t die Zeit in Stunden seit der Aufnahme und $c(t)$ die Konzentration in Milligramm pro Liter. Die Halbwertszeit des Wirkstoffs beträgt 2 Stunden.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 3 **1.1** Bestimmen Sie den Wert von k . Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

Im Folgenden gilt:

$$c(t) = 20 \cdot e^{-0,35 \cdot t}$$

- 3 **1.2** Ermitteln Sie, ab welchem Zeitpunkt die Konzentration unter 5 Milligramm pro Liter liegt. Runden Sie auf eine Nachkommastelle.

- 4 **1.3** Berechnen Sie $\dot{c}(0)$ und $\dot{c}(2)$ und deuten Sie die beiden Werte und ihren Unterschied im Sachzusammenhang.

- 4 **1.4** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen von c für $0 \leq t \leq 8$ in ein Koordinatensystem.

Maßstab: 1 h $\hat{=}$ 1 cm; 4 Milligramm pro Liter $\hat{=}$ 1 cm

- 3 **1.5** Ein Nutzer meint: „Nach einer Stunde, also der halben Halbwertszeit, ist noch drei Viertel des Wirkstoffs im Blut.“

Untersuchen Sie diese Aussage.

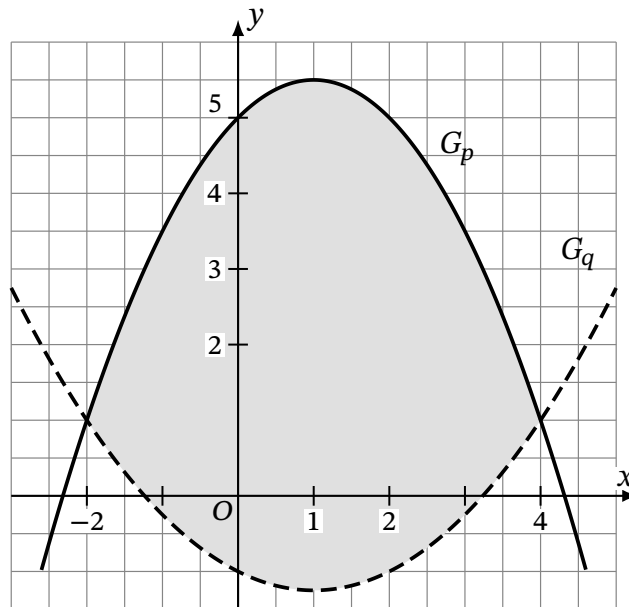
- 4 **1.6** Nach 6 Stunden nimmt der Nutzer eine zweite Tablette; die App addiert dazu einen weiteren, um 6 Stunden verschobenen Term der gleichen Form. Untersuchen Sie, welche Konzentration die App unmittelbar nach der zweiten Tablette anzeigt und ob die Konzentration 6 Stunden nach der zweiten Tablette unter 5 Milligramm pro Liter liegt. Nennen Sie eine Annahme, die diesem Modell zugrunde liegt.

BE

- 2.0** Ein Kräutergarten wird von zwei Wegen begrenzt, deren Ränder im Koordinatensystem durch die Graphen der Funktionen

$$p: x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + x + 5 \quad \text{und} \quad q: x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$$

beschrieben werden (x und y in Metern; siehe Abbildung, der Garten ist grau markiert).



Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 4 **2.1** Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von p und q .
- 2 **2.2** Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für den Flächeninhalt des Gartens.
- 5 **2.3** Berechnen Sie den Flächeninhalt des Gartens sowie die Kosten für die Bepflanzung, wenn 1 m^2 15 € kostet.
- 4 **2.4** Ermitteln Sie die Stelle, an der der Garten in y -Richtung am breitesten ist, und geben Sie diese Breite an.
- 3 **2.5** Ein Gärtner meint: „Die breiteste Stelle liegt immer dort, wo der obere Weg seinen höchsten Punkt hat.“
Untersuchen Sie, ob das hier zutrifft und ob es für beliebige Begrenzungskurven gilt.
- 4 **2.6** Zeichnen Sie die Graphen von p und q für $-2,5 \leq x \leq 4,5$ in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie den Garten.
Maßstab für beide Achsen: $1 \text{ m} \hat{=} 1 \text{ cm}$

43

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion

$$h: x \mapsto x^3 - 3x^2 + 4, \quad D_h = \mathbb{R}$$

Der Graph von h in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_h bezeichnet.

3 1.1 Ermitteln Sie die Nullstellen von h samt ihrer Vielfachheit.

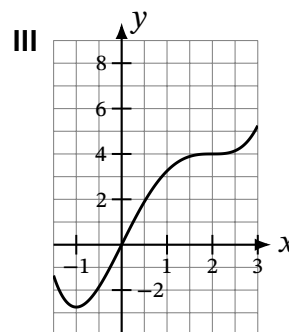
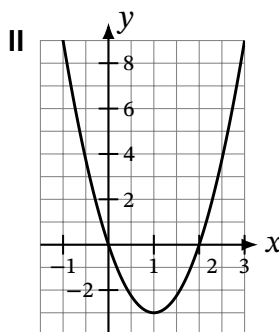
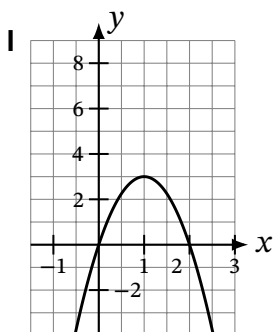
4 1.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_h .

4 1.3 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_h und geben Sie die Koordinaten des Wendepunkts an.

4 1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse G_h für $-1,5 \leq x \leq 3,2$ in ein Koordinatensystem.

Maßstab für beide Achsen: 1 LE $\hat{=}$ 1 cm

4 1.5 Die Abbildung zeigt drei Graphen. Einer davon ist der Graph von h' , ein anderer der Graph einer Stammfunktion von h . Entscheiden Sie ohne Rechnung, welcher Graph zu h' und welcher zu einer Stammfunktion von h gehört, und begründen Sie Ihre Entscheidung.



4 1.6 Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das G_h mit der x -Achse einschließt.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 2.0** Der Durchfahrtsbogen einer Kanalbrücke hat einen parabelförmigen Querschnitt, der im Koordinatensystem durch den Graphen der Funktion $k: x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + 3$ über der x -Achse (Wasseroberfläche) beschrieben wird (x und $k(x)$ in Metern). In den Querschnitt soll ein rechteckiges Schutzgitter eingesetzt werden, dessen obere Ecken auf dem Graphen liegen und das symmetrisch zur y -Achse steht; u ($u > 0$) ist die x -Koordinate der rechten oberen Ecke.
Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.
- 3 **2.1** Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt des Gitters gilt: $A(u) = 6u - \frac{1}{2}u^3$, und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für A an.
- 5 **2.2** Ermitteln Sie die Abmessungen des Gitters mit dem größtmöglichen Flächeninhalt und geben Sie diesen Flächeninhalt an.
- 3 **2.3** Ein Bootsführer meint: „Mein Hausboot ragt 2,5 m über das Wasser und ist 2,0 m breit. Wenn ich genau in der Mitte fahre, passe ich unter dem Bogen hindurch.“
Untersuchen Sie diese Aussage.
- 3.0** Die Höhe einer Maispflanze wird in den ersten 32 Tagen nach dem Aufgehen modellhaft durch die Funktion
- $$s(t) = -0,0125 t^3 + 0,6 t^2, \quad 0 \leq t \leq 32$$
- beschrieben (t in Tagen, $s(t)$ in Zentimetern über der Höhe beim Aufgehen).
- 3 **3.1** Berechnen Sie die momentane Wachstumsgeschwindigkeit der Maispflanze am 8. Tag und deuten Sie das Ergebnis.
- 3 **3.2** Ermitteln Sie alle Zeitpunkte, zu denen die Maispflanze momentan genauso schnell wächst wie am 8. Tag.
- 3 **3.3** Untersuchen Sie, ob das Modell auch für die Zeit nach dem 32. Tag geeignet ist.

43

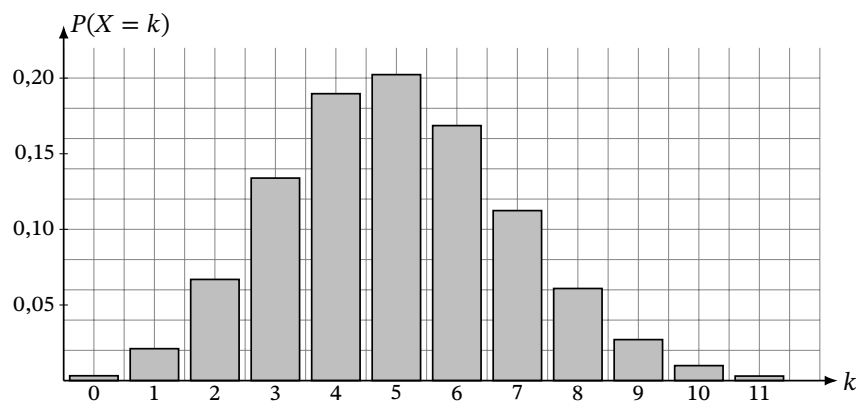
BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Ein Fahrradverleih stellt fest, dass bei 25 % aller Rückgaben ein Mangel am Rad gemeldet wird. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Rückgaben mit Mangel unter 20 zufällig ausgewählten Rückgaben an.

1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass genau fünf bzw. mindestens acht Rückgaben einen Mangel haben.

1.2 Die Auswertungssoftware des Verleihs stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X als Histogramm dar (Werte für $k > 11$ sind nicht dargestellt). Bestimmen Sie mithilfe des Histogramms näherungsweise $P(4 \leq X \leq 6)$ und kennzeichnen Sie den Erwartungswert von X ; begründen Sie dessen Lage.



1.3 Der Verleih kann zwischen zwei Wartungsverträgen wählen: Vertrag A kostet 3,00 € pro Ausleihe, danach fallen 4 % der Räder aus; Vertrag B kostet 4,00 €, danach fallen nur 1 % aus. Jeder Ausfall verursacht zusätzlich 50 € Kosten. Entscheiden Sie mithilfe der zu erwartenden Kosten pro Ausleihe, welcher Vertrag günstiger ist.

2.0 40 % der Ausleihen sind E-Bikes (E). Von den E-Bike-Ausleihen dauern 30 % länger als einen Tag (L); insgesamt dauern 18 % aller Ausleihen länger als einen Tag.

2.1 Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel für die Ereignisse E und L .

2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Ausleihe, die länger als einen Tag dauert, ein E-Bike betrifft, und deuten Sie das Ergebnis im Vergleich zu 40 %.

3.0 Nach der Umstellung auf neue Räder vermutet der Verleih, dass inzwischen bei weniger als 25 % der Rückgaben ein Mangel gemeldet wird (Gegenhypothese). Die Vermutung soll auf einem Signifikanzniveau von 5 % anhand von 100 zufällig ausgewählten Rückgaben getestet werden.

3.1 Entwickeln Sie einen geeigneten Hypothesentest und formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel im Sachzusammenhang.

3.2 Bei 16 der 100 Rückgaben wird ein Mangel gemeldet. Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Hinblick auf die Vermutung des Verleihs.

23

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0** Auf einem Stadtteilst fest sind 35 % der Besucher Kinder (K), 50 % der Besucher nutzen das Kuchenbuffet (B) und 20 % der Besucher sind Kinder, die das Kuchenbuffet nutzen. Ein Besucher wird zufällig ausgewählt.
- 2 1.1** Entscheiden Sie für die folgenden Vorgänge auf dem Fest jeweils mit Begründung, ob es sich um ein Zufallsexperiment handelt:
- a): Werfen eines Würfels beim Würfelspiel
 - b): Ablesen des Preises eines Kuchenstücks auf der ausgehängten Preisliste
 - c): ein Wurf einer geübten Werferin beim Ringwerfen
- 3 1.2** Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel für die Ereignisse K und B .
- 3 1.3** Eine Organisatorin meint: „Kinder nutzen das Kuchenbuffet häufiger als die übrigen Besucher.“
Untersuchen Sie, ob diese Aussage zutrifft.
- 4 2.1** Beim Ringwerfen kostet ein Spiel 2 €. Mit 5 % Wahrscheinlichkeit gewinnt man den Hauptpreis (Auszahlung 10 €), mit 25 % einen Kleinpreis (Auszahlung 4 €), sonst nichts. Die Zufallsgröße X gibt den Gewinn des Spielers (Auszahlung minus Einsatz) an. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung und den Erwartungswert von X und deuten Sie den Erwartungswert.
- 3 2.2** Ermitteln Sie, welche Auszahlung für den Hauptpreis festgelegt werden müsste, damit das Spiel fair ist.
- 4 3** 25 Besucher werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße Z gibt die Anzahl der Kinder unter ihnen an. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse „Genau 9 sind Kinder“ und „Mindestens 11 sind Kinder“. Begründen Sie dabei, dass Z als binomialverteilt angesehen werden kann.
- 4 4** Beim Elfmeterschießen trifft ein Spieler mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %. Er schießt so lange, bis er trifft, höchstens aber dreimal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er genau beim zweiten Schuss trifft, sowie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er gar nicht trifft.

23