

- Lösungshinweise -

Musterprüfung Nr. 005 zum Fachabitur
 zum Erwerb der Fachhochschulreife
 an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Notenschlüssel:

Note	Punkte	Bewertungseinheiten	
		von	bis
+	15	100	96
1	14	95	91
–	13	90	86
+	12	85	81
2	11	80	76
–	10	75	71
+	9	70	66
3	8	65	61
–	7	60	56
+	6	55	51
4	5	50	46
–	4	45	41
+	3	40	34
5	2	33	27
–	1	26	20
6	0	19	0

Ergibt die Gesamtsumme der Bewertungseinheiten n,5,
 so wird einmalig zugunsten des Prüflings aufgerundet.

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 1 - A -	
2	1.1	Im Term kommen nur gerade Exponenten vor: $f(-x) = f(x)$, G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse. $f(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow -\infty$ und für $x \rightarrow +\infty$
3	1.2	$f(x) = (x^2 - 4)^2 = (x - 2)^2(x + 2)^2$ $x_{1;2} = -2$ und $x_{3;4} = 2$ (jeweils doppelte Nullstellen, ± 2)
4	1.3	$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x - 2)(x + 2)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = \pm 2$ Vorzeichen von f' : – für $x < -2$, + für $-2 < x < 0$, – für $0 < x < 2$, + für $x > 2$ $\Rightarrow$ Tiefpunkte $T_1(-2 0)$, $T_2(2 0)$, Hochpunkt $H(0 16)$
3	1.4	$f(1) = 1 - 8 + 16 = 9$; $f'(1) = 4 - 16 = -12$ Tangente: $y = -12(x - 1) + 9$, also $y = -12x + 21$
3	2.1	$f'(x) = 0$ an den Stellen -1 und 3 (Schnittpunkte von $G_{f'}$ mit der x-Achse). Bei $x = -1$ wechselt f' das Vorzeichen von + nach –: Hochpunkt; bei $x = 3$ von – nach +: Tiefpunkt. <i>Bewertung:</i> 1 BE Stellen, 1 BE Vorzeichenwechsel, 1 BE Art.
2	2.2	Der Graph von f fällt am stärksten, wo f' den kleinsten (negativsten) Wert hat: im Tiefpunkt von $G_{f'}$, also an der Stelle $x = 1$ ($f'(1) = -4$). <i>Bewertung:</i> 1 BE Zusammenhang Steigung von G_f = Wert von f' , 1 BE Stelle.
2	3.1	$G(x) = x^3 - 3x^2 + C$; $G(1) = 1 - 3 + C = 0 \Rightarrow C = 2$: $G(x) = x^3 - 3x^2 + 2$
3	3.2	$g(x) = 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ oder $x = 2$ $\int_0^2 g(x) dx = [x^3 - 3x^2]_0^2 = 8 - 12 = -4$: Flächeninhalt 4 (FE)
22		

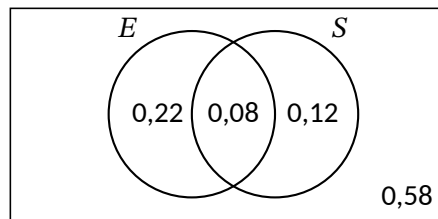
BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 1 - S -

2 **1.1** $\Omega = \{T; NT; NNT; NNN\}$ (nach einem Treffer wird nicht weiter geworfen)

2 **1.2** $P(\{T; NT\}) = 0,6 + 0,4 \cdot 0,6 = 0,84$

2 **2.1**



2 **2.2** $P(\text{genau ein Kurs}) = 0,22 + 0,12 = 0,34$

2 **3.1** Jedes Feld hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$: $E(\text{Auszahlung}) = \frac{1+2+3+6}{4} = 3$ (in €)

Die zu erwartende Auszahlung ist gleich dem Einsatz von 3 €, der zu erwartende Gewinn ist 0: Das Spiel ist fair.

2 **3.2** Ungünstig: Eine der Auszahlungen wird kleiner, die übrigen und der Einsatz bleiben gleich; die zu erwartende Auszahlung sinkt unter 3 €, der zu erwartende Gewinn wird negativ.

Bewertung: 1 BE Entscheidung, 1 BE Begründung ohne Rechnung.

12

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I -

3 **1.1** Halbwertszeit: $c(5) = 3 \Rightarrow 6e^{-5k} = 3 \Rightarrow e^{-5k} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{5} \approx 0,14$

3 **1.2** $6e^{-0,14t} < 1,5 \Rightarrow e^{-0,14t} < 0,25 \Rightarrow -0,14t < \ln(0,25) \Rightarrow t > \frac{\ln(4)}{0,14} \approx 9,9$

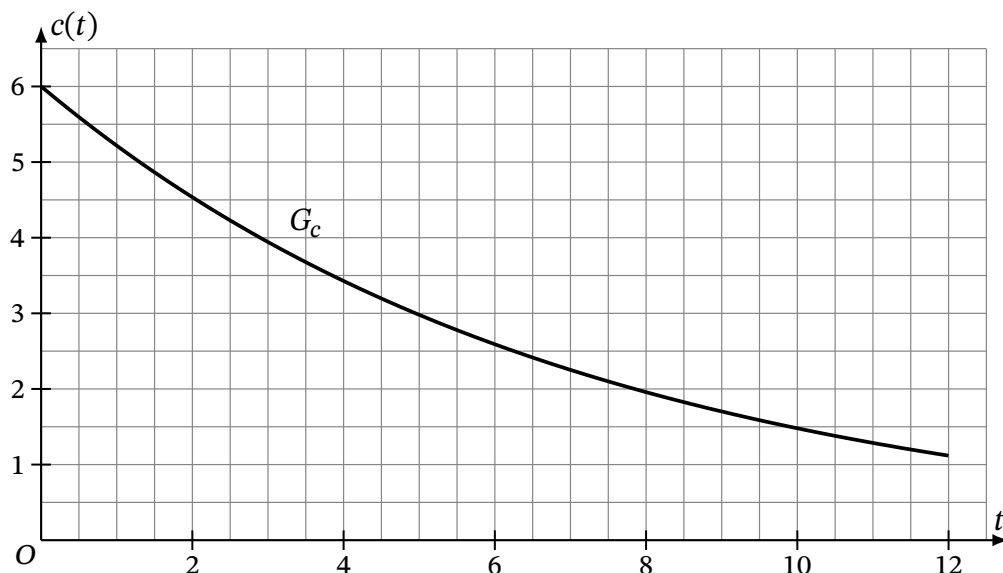
Nach etwa 9,9 Stunden liegt die Konzentration unter 1,5 Milligramm pro Liter.

4 **1.3** $\dot{c}(t) = -0,84e^{-0,14t}$; $\dot{c}(0) = -0,84$; $\dot{c}(5) = -0,84e^{-0,7} \approx -0,42$ (in mg/l pro Stunde)

Unmittelbar nach dem Trinken nimmt die Konzentration momentan um 0,84 mg/l pro Stunde ab, nach 5 Stunden nur noch um etwa 0,42 mg/l pro Stunde: Der Abbau wird mit sinkender Konzentration langsamer.

4 **1.4**

t	0	2	4	6	8	10	12
$c(t)$	6	4,53	3,43	2,59	1,96	1,48	1,12



3 **1.5** $c(10) = 6e^{-1,4} \approx 1,48$: Nach zwei Halbwertszeiten ist noch etwa ein Viertel der Anfangskonzentration vorhanden.

Die Aussage ist falsch: Bei exponentieller Abnahme halbiert sich die Konzentration in jeder Halbwertszeit; sie wird nie genau null, zwei Halbwertszeiten bedeuten nicht „zweimal die Hälfte abgebaut“.

Bewertung: volle BE nur mit Begründung über die wiederholte Halbierung.

4 **1.6** Für $t \geq 4$: $c_2(t) = 6e^{-0,14t} + 6e^{-0,14(t-4)}$

Unmittelbar nach dem zweiten Kaffee: $c_2(4) = 6e^{-0,56} + 6 \approx 9,43$ (in mg/l)

10 Stunden später: $c_2(14) = 6e^{-1,96} + 6e^{-1,4} \approx 2,32 > 1,5$: Die Konzentration liegt noch nicht unter 1,5 mg/l.

Annahmen: Das Koffein wird jeweils sofort vollständig aufgenommen und beide Anteile werden unabhängig voneinander mit derselben Halbwertszeit abgebaut (Überlagerung durch Addition).

Bewertung: 1 BE Modellterm, 1 BE Wert nach dem 2. Kaffee, 1 BE Vergleich, 1 BE Annahme.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I - (Fortsetzung)

4 **2.1** $-\frac{1}{4}x^2 + 4 = \frac{1}{4}x^2 - x \iff -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = 0 \iff x^2 - 2x - 8 = 0 \iff x = -2 \text{ oder } x = 4$

$p(-2) = 3, p(4) = 0$: Schnittpunkte $S_1(-2|3)$ und $S_2(4|0)$, also $(-2|3)$ und $(4|0)$

2 **2.2** Auszählen der Kästchen (je $0,25 \text{ m}^2$, etwa 72 Kästchen) oder Näherung durch Dreiecke/Trapeze: etwa 18 m^2 .

Bewertung: Werte zwischen 16 m^2 und 20 m^2 mit nachvollziehbarem Vorgehen sind zu akzeptieren.

5 **2.3** Differenzfunktion: $d(x) = p(x) - q(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ (≥ 0 auf $[-2; 4]$)

$$\int_{-2}^4 d(x) dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x \right]_{-2}^4 = \frac{40}{3} - \left(-\frac{14}{3} \right) = 18$$

Das Beet ist 18 m^2 groß; Kosten: $18 \cdot 12 \text{ €} = 216 \text{ €}$.

4 **2.4** Breite in y-Richtung an der Stelle x : $d(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

$$d'(x) = -x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1; d''(x) = -1 < 0: \text{Maximum}$$

$d(1) = -0,5 + 1 + 4 = 4,5$: An der Stelle $x = 1$ ist das Beet am breitesten, nämlich $4,5 \text{ m}$.

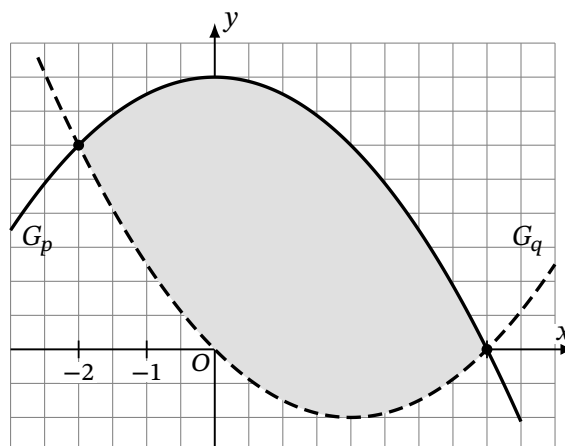
3 **2.5** Hier trifft es zu: Die Mitte zwischen -2 und 4 ist 1 .

Grund: Die Differenzfunktion d ist quadratisch, ihr Graph eine zur Scheitelachse symmetrische Parabel; der Scheitel liegt genau in der Mitte zwischen den Nullstellen.

Allgemein gilt die Aussage nicht: Ist die Differenz z. B. eine Funktion dritten Grades, liegt die breiteste Stelle im Allgemeinen nicht in der Mitte.

Bewertung: 1 BE Bestätigung, 1 BE Begründung über die Symmetrie der Parabel, 1 BE Grenze der Verallgemeinerung.

4 **2.6** Wertetabellen z. B. p : $(-3|1,75), (0|4), (2|3)$; q : $(-1|1,25), (2|-1), (5|1,25)$



43

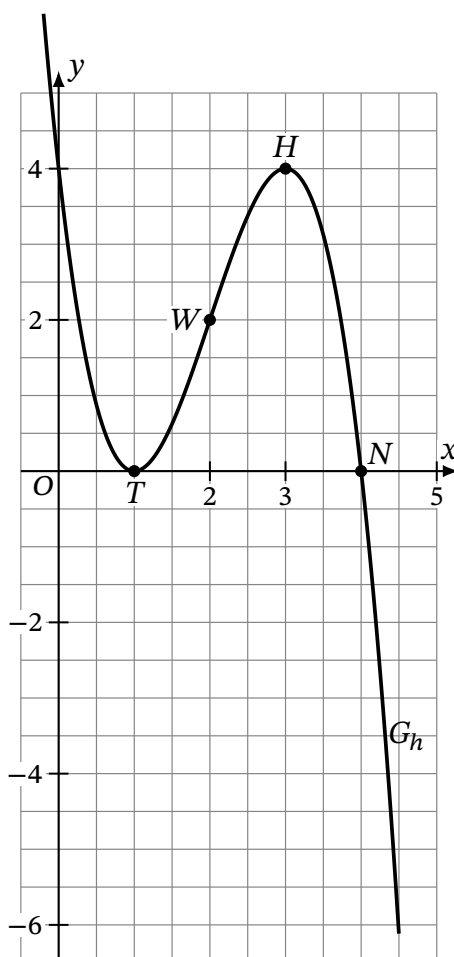
BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A II -

- 3 **1.1** $h(1) = -1 + 6 - 9 + 4 = 0$; Polynomdivision bzw. Faktorisieren:
 $h(x) = -(x-1)(x^2 - 5x + 4) = -(x-1)^2(x-4)$
 $x_{1;2} = 1$ (doppelte Nullstelle); $x_3 = 4$ (einfache Nullstelle)
- 4 **1.2** $h'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x-1)(x-3)$; $h'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ oder $x = 3$
 Vorzeichen von h' : – für $x < 1$, + für $1 < x < 3$, – für $x > 3$
 $\Rightarrow$ Tiefpunkt $T(1|0)$, Hochpunkt $H(3|4)$
- 4 **1.3** $h''(x) = -6x + 12$; $h''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$
 $h''(x) > 0$ für $x < 2$: G_h linksgekrümmt; $h''(x) < 0$ für $x > 2$: G_h rechtsgekrümmt
 $h(2) = -8 + 24 - 18 + 4 = 2$: Wendepunkt $W(2|2)$

4 **1.4**

x	-0,2	0	0,5	1	2	3	4	4,5
$h(x)$	6,05	4	0,88	0	2	4	0	-6,13



Fortsetzung siehe nächste Seite

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A II - (Fortsetzung)	
4	1.5 Graph von h': h' hat Nullstellen bei 1 und 3 (Extremstellen von h) und ist dazwischen positiv, weil G_h von T nach H steigt – das trifft auf Graph I zu (Graph III hat dort negative Werte). Stammfunktion H: $H' = h \geq 0$ für $x \leq 4$, also steigt H bis $x = 4$ und fällt danach (Hochpunkt bei 4); bei $x = 1$ hat h eine doppelte Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel, H dort einen Terrassenpunkt – das zeigt Graph II. <i>Bewertung:</i> je 2 BE für jede begründete Zuordnung.	
4	1.6 G_h schließt mit der x-Achse auf $[1; 4]$ ein Flächenstück ein, dort ist $h(x) \geq 0$: $\int_1^4 h(x) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 4x \right]_1^4 = 8 - 1,25 = 6,75 \text{ (FE)}$	
3	2.1 Breite des Tores $2u$, Höhe $k(u) = 4 - \frac{1}{3}u^2$ $A(u) = 2u \left(4 - \frac{1}{3}u^2 \right) = 8u - \frac{2}{3}u^3$ Sinnvoll: $u > 0$ und $k(u) > 0$, also $D_A =]0; \sqrt{12}[$	
5	2.2 $A'(u) = 8 - 2u^2 = 0 \Rightarrow u = 2$ ($u > 0$); $A''(u) = -4u$, $A''(2) < 0$: Maximum Breite 4 m, Höhe $k(2) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \approx 2,67$ m $A(2) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3} \approx 10,7 \text{ (in m}^2\text{)}$	
3	2.3 Fährt das Fahrzeug mittig, liegen seine Seitenkanten bei $x = \pm 1,2$. $k(1,2) = 4 - \frac{1,44}{3} = 3,52 \text{ (in m)} < 3,9$ Die oberen Kanten des Fahrzeugs stoßen an. Die Aussage ist falsch: Entscheidend ist nicht die Höhe in der Mitte, sondern die Höhe der Unterführung am Rand des Fahrzeugs. <i>Bewertung:</i> 1 BE Randstelle, 1 BE Vergleich, 1 BE Urteil.	
3	3.1 $s'(t) = -0,03t^2 + 1,2t$; $s'(10) = 9$ Am 10. Tag wächst die Sonnenblume nach dem Modell momentan um 9 Zentimeter pro Tag.	
3	3.2 $s'(t) = 9 \iff t^2 - 40t + 300 = 0 \iff t = 10 \text{ oder } t = 30$ Beide Zeitpunkte liegen im Definitionsbereich: Am 10. und am 30. Tag wächst die Sonnenblume momentan gleich schnell (vor und nach der stärksten Wachstumsphase).	
3	3.3 $s'(t) = -0,03 t(t - 40) < 0$ für $t > 40$: Die Höhe würde nach dem 40. Tag abnehmen; z. B. wäre $s(60) = 0$. Das widerspricht der Wirklichkeit (die Pflanze schrumpft nicht): Das Modell ist nur bis zum 40. Tag (Wachstumsende) geeignet.	
43		

BE

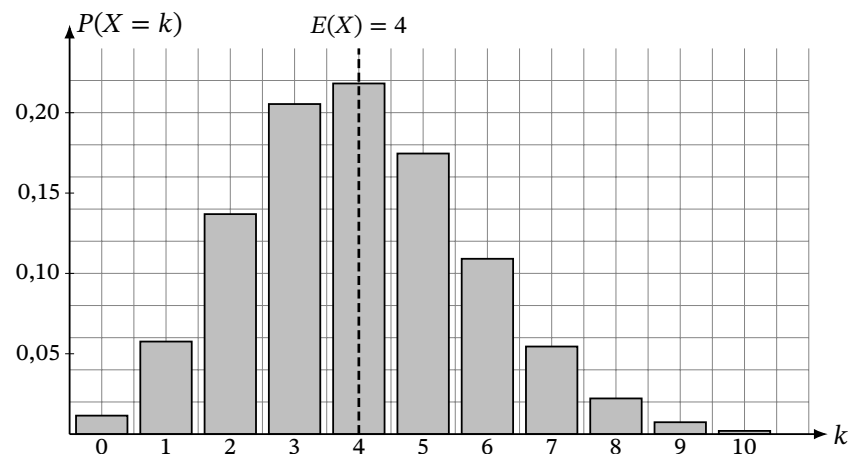
- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S I -

3 1.1 $X \sim B(20; 0,2)$

$$P(X = 4) = B(20; 0,2; 4) = 0,21820$$

$$P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - 0,80421 = 0,19579$$

4 1.2 Summe der Säulenhöhen bei $k = 3, 4, 5$: $\approx 0,205 + 0,218 + 0,175 \approx 0,60$ (exakt 0,59813)
Erwartungswert $E(X) = n p = 20 \cdot 0,2 = 4$: Er liegt bei der höchsten Säule, um die sich die Verteilung konzentriert.



Bewertung: Ablesewerte zwischen 0,58 und 0,62 sind zu akzeptieren.

4 1.3 Dienst A: $4,50 \text{ €} + 0,02 \cdot 30 \text{ €} = 5,10 \text{ €}$ pro Paket

Dienst B: $5,00 \text{ €} + 0,005 \cdot 30 \text{ €} = 5,15 \text{ €}$ pro Paket

Dienst A ist im Mittel um 5 Cent pro Paket günstiger; der Unterschied ist klein, zufriedene Kunden durch weniger Schäden könnten trotzdem für B sprechen.

3 2.1

	R	$\bar{R}$	Σ
K	0,15	0,45	0,60
$\bar{K}$	0,05	0,35	0,40
Σ	0,20	0,80	1

3 2.2 $P_R(K) = \frac{0,15}{0,20} = 0,75$

Drei Viertel der zurückgeschickten Pakete enthalten Kleidung, obwohl Kleidung nur 60 % der Bestellungen ausmacht: Kleidung wird überdurchschnittlich oft zurückgeschickt.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S II -

- 2 **1.1** a) Zufallsexperiment: Ausgang ungewiss, unter gleichen Bedingungen wiederholbar.
 b) Kein Zufallsexperiment: Die Uhrzeit steht fest. c) Zufallsexperiment: Auch ein geübter Spieler trifft nicht sicher (aber nicht Laplace).

Bewertung: 1 BE für zwei richtige, 2 BE für drei richtige Entscheidungen mit Begründung.

3 **1.2**

	G	$\bar{G}$	Σ
E	0,25	0,15	0,40
$\bar{E}$	0,30	0,30	0,60
Σ	0,55	0,45	1

- 3 **1.3** $P_E(G) = \frac{0,25}{0,40} = 0,625$; $P_{\bar{E}}(G) = \frac{0,30}{0,60} = 0,5$

Die Aussage trifft nicht zu: Von den Eltern essen 62,5 % am Grillstand, von den übrigen Besuchern nur 50 % – Eltern essen also häufiger dort.

Bewertung: volle BE nur bei Vergleich bedingter Wahrscheinlichkeiten (nicht nur 0,25 mit 0,30).

4 **2.1**

x in €	4	1	-1
$P(X = x)$	0,1	0,2	0,7

$$E(X) = 4 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,2 + (-1) \cdot 0,7 = -0,10$$

Auf lange Sicht verliert ein Spieler im Mittel 0,10 € pro Spiel (Einnahme für den Stand).

- 3 **2.2** Mit der Auszahlung a für rote Punkte: $0,1(a - 1) + 0,2 \cdot 1 + 0,7 \cdot (-1) = 0$
 $0,1a - 0,6 = 0 \Rightarrow a = 6$: Die Auszahlung müsste 6 € betragen.

- 4 **3** 25 Besucher, jeweils Treffer „Eltern“ mit $p = 0,4$; bei vielen Besuchern ist die Auswahl annähernd unabhängig und p konstant: $Z \sim B(25; 0,4)$

$$P(Z = 10) = B(25; 0,4; 10) = 0,16116;$$

$$P(Z \geq 12) = 1 - P(Z \leq 11) = 1 - 0,73228 = 0,26772$$

- 4 **4** Ergebnisraum: $\{T; NT; NNT; NNNT; NNNN\}$

$$P(NNT) = 0,7^2 \cdot 0,3 = 0,147$$

$$P(NNNN) = 0,7^4 = 0,2401$$

23