

Musterprüfung Nr. 005 zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 1: ohne Hilfsmittel

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben sämtliche Aufgaben zu bearbeiten.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

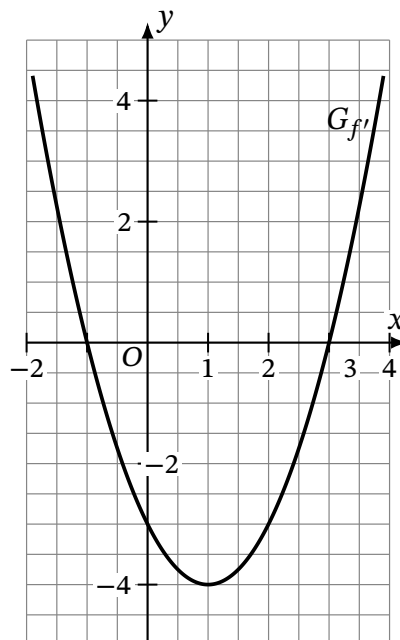
1.0 Gegeben ist die Funktion

$$f: x \mapsto x^4 - 8x^2 + 16, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

- 2 1.1 Untersuchen Sie G_f auf Symmetrie zum Koordinatensystem und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \rightarrow \pm\infty$ an.
- 3 1.2 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f samt ihrer Vielfachheit.
- 4 1.3 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f .
- 3 1.4 Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an G_f im Punkt $P(1 \mid f(1))$.

2.0 Die Abbildung zeigt den Graphen $G_{f'}$ der Ableitungsfunktion f' einer auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktion f .



- 3 2.1 Geben Sie mithilfe der Abbildung die Stellen an, an denen der Graph von f relative Extrempunkte hat, sowie deren Art, und begründen Sie Ihre Angabe.
- 2 2.2 Begründen Sie mithilfe der Abbildung, an welcher Stelle der Graph von f am stärksten fällt.
- 3.0 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto 3x^2 - 6x$ mit $D_g = \mathbb{R}$.
- 2 3.1 Bestimmen Sie den Term derjenigen Stammfunktion G von g , für die $G(1) = 0$ gilt.
- 3 3.2 Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von g mit der x -Achse einschließt.

22

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0** Beim Ringewerfen auf einem Pfarrfest trifft ein Kind mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 %. Es wirft so lange, bis es trifft, höchstens aber dreimal (Treffer T, kein Treffer N). Die Würfe sind voneinander unabhängig.
- 2 **1.1** Geben Sie einen Ergebnisraum dieses Zufallsexperiments an.
- 2 **1.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Kind höchstens zwei Würfe benötigt.
- 2.0** An einer Volkshochschule belegen 30 % der Teilnehmenden einen Englischkurs (E), 20 % einen Spanischkurs (S) und 8 % beide Kurse. Eine teilnehmende Person wird zufällig ausgewählt.
- 2 **2.1** Vervollständigen Sie ein Venn-Diagramm der Ereignisse E und S , indem Sie für jede Teilfläche die zugehörige Wahrscheinlichkeit eintragen.
- 2 **2.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Person genau einen der beiden Kurse belegt.
- 3.0** Ein Glückskeisel hat vier gleich große Felder mit den Aufschriften 1 €, 2 €, 3 € und 6 €. Nach dem Drehen wird der Betrag des Felds ausgezahlt, auf dem der Keisel liegen bleibt. Ein Spiel kostet 3 € Einsatz.
- 2 **3.1** Zeigen Sie, dass das Spiel fair ist.
- 2 **3.2** Die Aufschrift 6 € wird durch 5 € ersetzt, der Einsatz bleibt gleich. Entscheiden Sie ohne Rechnung, ob das Spiel dann für den Spieler günstig oder ungünstig ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

12

Musterprüfung Nr. 005 zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 2: mit Hilfsmitteln

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Stochastik* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

- 1.0** Eine Fitness-App schätzt nach dem Trinken eines Kaffees die Koffeinkonzentration im Blut mithilfe der Funktion c mit

$$c(t) = 6 \cdot e^{-k \cdot t}, \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

und $k \in \mathbb{R}^+$. Dabei ist t die Zeit in Stunden seit der Aufnahme und $c(t)$ die Konzentration in Milligramm pro Liter. Die Halbwertszeit von Koffein beträgt 5 Stunden.

Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 3 **1.1** Bestimmen Sie den Wert von k . Runden Sie auf zwei Nachkommastellen.

Im Folgenden gilt:

$$c(t) = 6 \cdot e^{-0,14 \cdot t}$$

- 3 **1.2** Ermitteln Sie, ab welchem Zeitpunkt die Konzentration unter 1,5 Milligramm pro Liter liegt. Runden Sie auf eine Nachkommastelle.

- 4 **1.3** Berechnen Sie $\dot{c}(0)$ und $\dot{c}(5)$ und deuten Sie die beiden Werte und ihren Unterschied im Sachzusammenhang.

- 4 **1.4** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen von c für $0 \leq t \leq 12$ in ein Koordinatensystem.

Maßstab: 1 h $\hat{=}$ 1 cm; 1 Milligramm pro Liter $\hat{=}$ 1 cm

- 3 **1.5** Eine Nutzerin meint: „Nach zwei Halbwertszeiten, also nach 10 Stunden, ist das Koffein vollständig abgebaut.“

Untersuchen Sie diese Aussage.

- 4 **1.6** Nach 4 Stunden trinkt die Nutzerin einen zweiten Kaffee; die App addiert dazu einen weiteren, um 4 Stunden verschobenen Term der gleichen Form. Untersuchen Sie, welche Konzentration die App unmittelbar nach dem zweiten Kaffee anzeigt und ob die Konzentration 10 Stunden nach dem zweiten Kaffee unter 1,5 Milligramm pro Liter liegt. Nennen Sie eine Annahme, die diesem Modell zugrunde liegt.

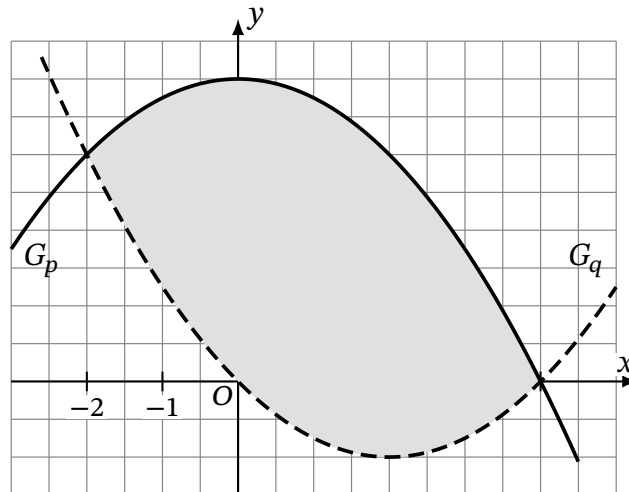
Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 2.0** Ein Beet in einem Park wird von zwei Wegen begrenzt, deren Ränder im Koordinatensystem durch die Graphen der Funktionen

$$p: x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + 4 \quad \text{und} \quad q: x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - x$$

beschrieben werden (x und y in Metern; siehe Abbildung, das Beet ist grau markiert).



Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 4 **2.1** Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von p und q .
- 2 **2.2** Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung einen Näherungswert für den Flächeninhalt des Beets.
- 5 **2.3** Berechnen Sie den Flächeninhalt des Beets sowie die Kosten für die Bepflanzung, wenn 1 m^2 12 € kostet.
- 4 **2.4** Ermitteln Sie die Stelle, an der das Beet in y -Richtung am breitesten ist, und geben Sie diese Breite an.
- 3 **2.5** Ein Gärtner meint: „Die breiteste Stelle liegt immer genau in der Mitte zwischen den beiden Schnittstellen.“
Untersuchen Sie, ob das hier zutrifft und ob es für beliebige Begrenzungskurven gilt.
- 4 **2.6** Zeichnen Sie die Graphen von p und q für $-3 \leq x \leq 5$ in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie das Beet.
Maßstab für beide Achsen: $1 \text{ m} \hat{=} 1 \text{ cm}$

43

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion

$$h : x \mapsto -x^3 + 6x^2 - 9x + 4, \quad D_h = \mathbb{R}$$

Der Graph von h in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_h bezeichnet.

3 1.1 Ermitteln Sie die Nullstellen von h samt ihrer Vielfachheit.

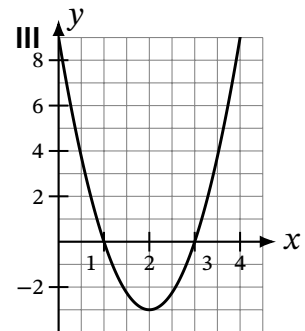
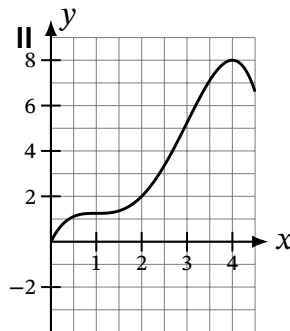
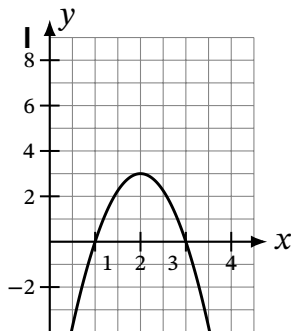
4 1.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_h .

4 1.3 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_h und geben Sie die Koordinaten des Wendepunkts an.

4 1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse G_h für $-0,2 \leq x \leq 4,5$ in ein Koordinatensystem.

Maßstab für beide Achsen: $1 \text{ LE} \hat{=} 1 \text{ cm}$

4 1.5 Die Abbildung zeigt drei Graphen. Einer davon ist der Graph von h' , ein anderer der Graph einer Stammfunktion von h . Entscheiden Sie ohne Rechnung, welcher Graph zu h' und welcher zu einer Stammfunktion von h gehört, und begründen Sie Ihre Entscheidung.



4 1.6 Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das G_h mit der x -Achse einschließt.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 2.0** Eine Unterführung hat einen parabelförmigen Querschnitt, der im Koordinatensystem durch den Graphen der Funktion $k : x \mapsto -\frac{1}{3}x^2 + 4$ über der x -Achse (Fahrbahn) beschrieben wird (x und $k(x)$ in Metern). In den Querschnitt soll ein rechteckiges Tor eingesetzt werden, dessen obere Ecken auf dem Graphen liegen und das symmetrisch zur y -Achse steht; u ($u > 0$) ist die x -Koordinate der rechten oberen Ecke. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.
- 3 2.1** Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt des Tores gilt: $A(u) = 8u - \frac{2}{3}u^3$, und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für A an.
- 5 2.2** Ermitteln Sie die Abmessungen des Tores mit dem größtmöglichen Flächeninhalt und geben Sie diesen Flächeninhalt an.
- 3 2.3** Ein Fahrer meint: „Die Unterführung ist in der Mitte 4 m hoch, also passt mein 3,9 m hohes und 2,4 m breites Fahrzeug hindurch, wenn ich genau in der Mitte fahre.“ Untersuchen Sie diese Aussage.
- 3.0** Die Höhe einer Sonnenblume wird in den ersten 40 Tagen nach dem Auspflanzen modellhaft durch die Funktion
- $$s(t) = -0,01 t^3 + 0,6 t^2, \quad 0 \leq t \leq 40$$
- beschrieben (t in Tagen, $s(t)$ in Zentimetern über der Höhe beim Auspflanzen).
- 3 3.1** Berechnen Sie die momentane Wachstumsgeschwindigkeit der Sonnenblume am 10. Tag und deuten Sie das Ergebnis.
- 3 3.2** Ermitteln Sie alle Zeitpunkte, zu denen die Sonnenblume momentan genauso schnell wächst wie am 10. Tag.
- 3 3.3** Untersuchen Sie, ob das Modell auch für die Zeit nach dem 40. Tag geeignet ist.

43

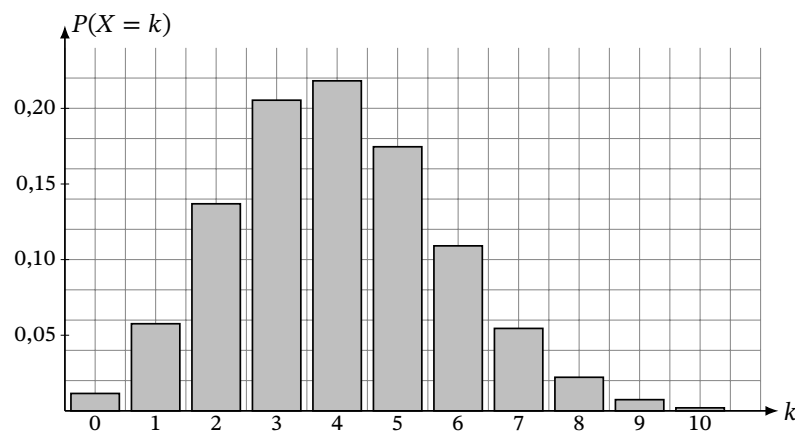
BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Ein Online-Shop stellt fest, dass 20 % aller Pakete zurückgeschickt werden. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der zurückgeschickten Pakete unter 20 zufällig ausgewählten Paketen an.

1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass genau vier Pakete bzw. mindestens sechs Pakete zurückgeschickt werden.

1.2 Die Auswertungssoftware des Shops stellt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X als Histogramm dar (Werte für $k > 10$ sind nicht dargestellt). Bestimmen Sie mithilfe des Histogramms näherungsweise $P(3 \leq X \leq 5)$ und kennzeichnen Sie den Erwartungswert von X ; begründen Sie dessen Lage.



1.3 Der Shop kann zwischen zwei Paketdiensten wählen: Dienst A kostet 4,50 € pro Paket, 2 % der Pakete werden beschädigt; Dienst B kostet 5,00 €, 0,5 % werden beschädigt. Für jedes beschädigte Paket entstehen dem Shop zusätzlich 30 € Kosten. Entscheiden Sie mithilfe der zu erwartenden Kosten pro Paket, welcher Dienst günstiger ist.

2.0 60 % der Bestellungen sind Kleidung (K). Von den Kleidungsbestellungen werden 25 % zurückgeschickt (R); insgesamt werden 20 % aller Bestellungen zurückgeschickt.

2.1 Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel für die Ereignisse K und R .

2.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zurückgeschicktes Paket Kleidung enthält, und deuten Sie das Ergebnis im Vergleich zu 60 %.

3.0 Nach Einführung eines Größenberaters vermutet der Shop, dass inzwischen weniger als 20 % der Pakete zurückgeschickt werden (Gegenhypothese). Die Vermutung soll auf einem Signifikanzniveau von 5 % anhand von 100 zufällig ausgewählten Bestellungen getestet werden.

3.1 Entwickeln Sie einen geeigneten Hypothesentest und formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel im Sachzusammenhang.

3.2 Von den 100 Bestellungen werden 15 zurückgeschickt. Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Hinblick auf die Vermutung des Shops.

23

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0** Auf einem Kindergartenfest sind 40 % der Besucher Eltern (E), 55 % der Besucher essen am Grillstand (G) und 25 % der Besucher sind Eltern, die am Grillstand essen. Ein Besucher wird zufällig ausgewählt.
- 2 1.1** Entscheiden Sie für die folgenden Vorgänge auf dem Kindergartenfest jeweils mit Begründung, ob es sich um ein Zufallsexperiment handelt:
- a): Ziehen eines Loses aus einer gut gemischten Lostrommel
 - b): Ablesen der Uhrzeit beim offiziellen Beginn des Festes um 14 Uhr
 - c): ein Schuss eines geübten Spielers auf eine Torwand
- 3 1.2** Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel für die Ereignisse E und G .
- 3 1.3** Ein Organisator meint: „Eltern essen seltener am Grillstand als die übrigen Besucher.“ Untersuchen Sie, ob diese Aussage zutrifft.
- 4 2.1** Beim Entenangeln kostet ein Spiel 1 €. 10 % der Enten tragen einen roten Punkt (Auszahlung 5 €), 20 % einen blauen Punkt (Auszahlung 2 €), die übrigen keinen Punkt (keine Auszahlung). Die Zufallsgröße X gibt den Gewinn des Spielers (Auszahlung minus Einsatz) an.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung und den Erwartungswert von X und deuten Sie den Erwartungswert.
- 3 2.2** Ermitteln Sie, welche Auszahlung für Enten mit rotem Punkt festgelegt werden müsste, damit das Spiel fair ist.
- 4 3** 25 Besucher werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße Z gibt die Anzahl der Eltern unter ihnen an. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse „Genau 10 sind Eltern“ und „Mindestens 12 sind Eltern“. Begründen Sie dabei, dass Z als binomialverteilt angesehen werden kann.
- 4 4** Beim Torwandschießen trifft eine Spielerin mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 %. Sie schießt so lange, bis sie trifft, höchstens aber viermal. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie genau beim dritten Schuss trifft, sowie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie gar nicht trifft.

23