

- Lösungshinweise -

Musterprüfung Nr. 006 (Nachtermin) zum Fachabitur
 zum Erwerb der Fachhochschulreife
 an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Notenschlüssel:

Note	Punkte	Bewertungseinheiten	
		von	bis
+	15	100	96
1	14	95	91
–	13	90	86
+	12	85	81
2	11	80	76
–	10	75	71
+	9	70	66
3	8	65	61
–	7	60	56
+	6	55	51
4	5	50	46
–	4	45	41
+	3	40	34
5	2	33	27
–	1	26	20
6	0	19	0

Ergibt die Gesamtsumme der Bewertungseinheiten **n,5**,
 so wird einmalig zugunsten des Prüflings aufgerundet.

BE

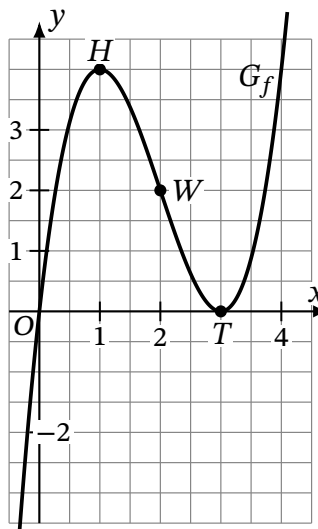
- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 1 - A -

2 **1.1** $f(x) = x(x^2 - 6x + 9) = x(x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ (einfache Nullstelle), $x_{2,3} = 3$ (doppelte Nullstelle)

4 **1.2** $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ oder $x = 3$
 Vorzeichen von f' : + für $x < 1$, – für $1 < x < 3$, + für $x > 3$
 $\Rightarrow$ Hochpunkt $H(1 | 4)$, Tiefpunkt $T(3 | 0)$ ($f(1) = 1 - 6 + 9 = 4$)

2 **1.3** $f''(x) = 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$; f'' wechselt dort das Vorzeichen (von – nach +).
 $f(2) = 8 - 24 + 18 = 2$: Wendepunkt $W(2 | 2)$

3 **1.4** $f(-0,3) \approx -3,3$, $f(4) = 4$; $f(x) \rightarrow +\infty$ für $x \rightarrow +\infty$



3 **2.1** Für $x \rightarrow +\infty$ gilt $e^{-x} \rightarrow 0$, also $g(x) \rightarrow b$: Aus der Asymptote $y = -1$ folgt $b = -1$.
 G_g schneidet die y -Achse bei 3: $g(0) = a + b = 3 \Rightarrow a = 4$. Also $a = 4$ und $b = -1$.
 Bewertung: 1 BE b mit Begründung über die Asymptote, 1 BE Ansatz $g(0) = 3$, 1 BE a .

2 **2.2** $G(x) = -4e^{-x} - x + C$; $G(0) = -4 + C = 0 \Rightarrow C = 4$: $G(x) = -4e^{-x} - x + 4$

2 **3.1** Produktregel: $H'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x + 1) \cdot e^x = h(x)$

2 **3.2** $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$; $h(x) \geq 0$ auf $[-1; 0]$:

$$\int_{-1}^0 h(x) dx = H(0) - H(-1) = 0 - (-e^{-1}) = e^{-1}$$

Der Flächeninhalt beträgt $e^{-1} = \frac{1}{e}$ (FE).

2 **3.3** Für $x < -1$ ist $x + 1 < 0$ und $e^x > 0$, also $h(x) < 0$: G_h verläuft auf $[-3; -1[$ unterhalb der x -Achse.

Das Integral über ein Intervall, auf dem der Integrand negativ ist, hat einen negativen Wert.

Bewertung: 1 BE Vorzeichen von h , 1 BE Schluss auf das Integral.

22

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 1 - S -	
2	1.1	a) Zufallsexperiment: Der Ausgang (Glitzerkarte oder nicht) ist vorher ungewiss, der Vorgang ist wiederholbar. b) Kein Zufallsexperiment: Der Preis steht fest, das Ergebnis ist nicht ungewiss.
2	1.2	$P(\text{genau eine}) = 0,25 \cdot 0,75 + 0,75 \cdot 0,25 = 0,375$
2	2.1	Die Flächen sind verschieden groß; große Flächen sind als Standfläche stabiler. Es gibt keinen Grund, alle sechs Flächen für gleich wahrscheinlich zu halten – ein Laplace-Experiment liegt nicht vor. <i>Bewertung:</i> 1 BE Hinweis auf die verschiedenen Flächen, 1 BE Folgerung.
2	2.2	Relative Häufigkeit: $h(G) = \frac{222}{600} = 0,37$; Schätzwert $P(G) \approx 0,37$. Bei einer großen Anzahl von Würfeln stabilisiert sich die relative Häufigkeit (empirisches Gesetz der großen Zahlen).
2	3.1	$5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ Outfits
2	3.2	Reihenfolge ohne Wiederholung: $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ Belegungen
12		

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I -

- 3 **1.1** $s(0) = 0$: Unmittelbar bei der Veröffentlichung gibt es noch keine Abrufe.
Für $t \rightarrow \infty$ gilt $t \cdot e^{-0,25t} \rightarrow 0$ (die Exponentialfunktion dominiert), also $s(t) \rightarrow 0$: Mit der Zeit wird das Musikstück kaum noch abgerufen.

- 5 **1.2** $\dot{s}(t) = 2000 e^{-0,25t} + 2000 t \cdot (-0,25) e^{-0,25t} = 500 (4 - t) e^{-0,25t}$
 $\dot{s}(t) = 0 \iff t = 4$ (da $e^{-0,25t} > 0$); $\dot{s}$ wechselt dort das Vorzeichen von + nach -: Maximum.

$$s(4) = 8000 e^{-1} \approx 2943$$

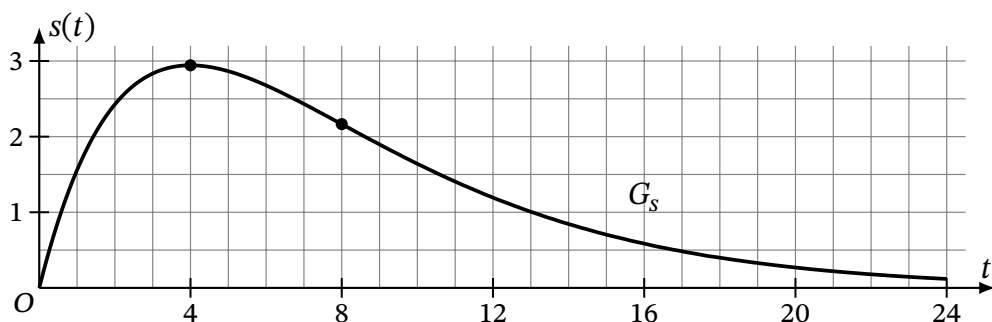
Vier Tage nach der Veröffentlichung wird das Stück am häufigsten abgerufen, mit etwa 2943 Abrufen pro Tag.

- 4 **1.3** $\ddot{s}(t) = 500 (-1) e^{-0,25t} + 500 (4 - t) (-0,25) e^{-0,25t} = 125 (t - 8) e^{-0,25t}$
 $\ddot{s}(t) = 0 \iff t = 8$; Vorzeichenwechsel von - nach +: $\dot{s}$ hat bei $t = 8$ ein Minimum ($\dot{s}(8) = -2000 e^{-2} \approx -271$).

Zum Zeitpunkt $t = 8$ nimmt die Anzahl der Abrufe pro Tag am stärksten ab.

- 4 **1.4**

t	0	2	4	6	8	12	16	20	24
$s(t)$	0	2426	2943	2678	2165	1195	586	270	119



- 3 **1.5** $\dot{S}(t) = -8000 [1 \cdot e^{-0,25t} + (t + 4) \cdot (-0,25) e^{-0,25t}]$
 $= -8000 e^{-0,25t} (-0,25t) = 2000 t e^{-0,25t} = s(t)$
 $S(0) = 32000 - 8000 \cdot 4 \cdot 1 = 0$

- 3 **1.6** $\int_0^{12} s(t) dt = S(12) - S(0) = 32000 - 128000 e^{-3} \approx 25627$

In den ersten zwölf Tagen wird das Stück etwa 25627-mal abgerufen.

- 3 **1.7** Die Gesamtzahl der Abrufe bis zum Zeitpunkt t ist $S(t) = 32000 - 8000 (t + 4) e^{-0,25t}$.
Da $8000 (t + 4) e^{-0,25t} > 0$ ist, gilt $S(t) < 32000$; für $t \rightarrow \infty$ geht dieser Term gegen 0, also $S(t) \rightarrow 32000$.

Die Aussage ist falsch: Obwohl die Rate nie null wird, bleibt die Gesamtzahl unter 32000 Abrufen, weil die Rate schnell genug abnimmt.

Bewertung: 1 BE Ansatz über S , 1 BE Grenze 32000, 1 BE Urteil mit Begründung.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A I - (Fortsetzung)	
2	2.1	$G(0) = -440$: Wird kein Honig verkauft, entsteht ein Verlust von 440 €; das sind die monatlichen Fixkosten.
4	2.2	$G(4) = -640 + 1920 - 840 - 440 = 0$ Polynomdivision: $G(x) = -10(x - 4)(x^2 - 8x - 11)$ $x^2 - 8x - 11 = 0 \iff x = 4 \pm \sqrt{27}$ $x \approx 9,20$ (die negative Lösung liegt nicht in D_G). Vorzeichen: $G(x) > 0$ für $4 < x < 9,20$. Gewinnzone: mehr als 400 und weniger als etwa 920 Gläser im Monat.
4	2.3	$G'(x) = -30x^2 + 240x - 210 = -30(x - 1)(x - 7)$; $G'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ oder $x = 7$ $G''(x) = -60x + 240$; $G''(7) = -180 < 0$: Maximum; Randwerte $G(0) = -440$, $G(10) = -540$. Bei 700 Gläsern ist der Gewinn am größten: $G(7) = 540$, also 540 €.
3	2.4	Die Maximalstelle $x = 7$ liegt unterhalb der Grenze $x = 8$; die Bedingung $x \leq 8$ schränkt das Maximum nicht ein. Auf $[7; 8]$ fällt G ($G'(x) < 0$ für $x > 7$), ein Randmaximum bei 800 Gläsern gibt es nicht. Die Imkerei sollte weiterhin 700 Gläser abfüllen; der größtmögliche Gewinn beträgt 540 €. Bewertung: volle BE nur mit Begründung, warum die Kapazitätsgrenze keine Rolle spielt.
2	2.5	$G'(x) = -30x^2 + 240x - 210$, $G'(6) = 150$ Bei 600 Gläsern steigt der Gewinn momentan um 150 € je hundert zusätzliche Gläser.
3	2.6	$G''(x) = -60x + 240 = 0 \iff x = 4$; $G'''(x) = -60 < 0$, also hat G' bei $x = 4$ ein Maximum. Bei 400 Gläsern nimmt der Gewinn am stärksten zu, momentan um $G'(4) = -480 + 960 - 210 = 270$ € je hundert zusätzliche Gläser.
43		

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A II -

3 **1.1** Probe: $f(1) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - 3 + 4 = 0$

Polynomdivision: $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x^2 - 2x - 8) = \frac{1}{2}(x-1)(x+2)(x-4)$

Nullstellen: $x = -2, x = 1, x = 4$

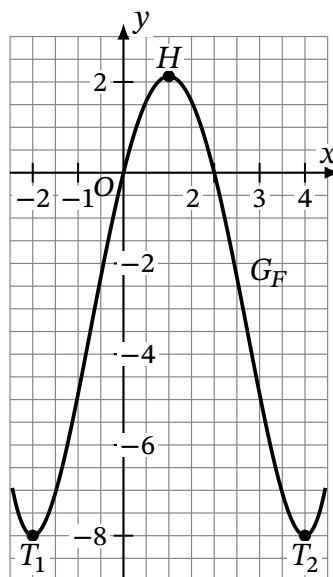
- 4 **1.2** Es gilt $F' = f$; Extremstellen von F liegen an Nullstellen von f mit Vorzeichenwechsel.
Bei $x = -2$ und $x = 4$ wechselt f von $-$ nach $+$: Tiefpunkte von G_F ; bei $x = 1$ von $+$ nach $-$: Hochpunkt von G_F .

Bewertung: 1 BE Zusammenhang $F' = f$, 2 BE Vorzeichenwechsel, 1 BE Art.

- 3 **1.3** Tabelle I gehört zu f : Werte 0 an den Nullstellen -2 und 1 , $f(0) = 4$ wie im Graphen.
Tabelle III gehört zu F : $F(0) = 0$ und größter Wert bei $x = 1$ (Hochpunkt aus 1.2).
Tabelle II gehört zu f' : positive Werte links vom Hochpunkt von G_f (bei $x \approx -0,73$), negative rechts davon.

2 **1.4** $F(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + C$; $F(0) = 0 \Rightarrow C = 0$: $F(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x$

- 4 **1.5** $F(-2) = 2 + 4 - 6 - 8 = -8$, $F(1) = 2,125$, $F(4) = 32 - 32 - 24 + 16 = -8$,
 $F(-2,5) = F(4,5) \approx -6,68$; G_F hat Wendepunkte an den Extremstellen von f
($x \approx -0,73$ und $x \approx 2,73$).



4 **1.6** $\int_{-2}^4 f(x) dx = F(4) - F(-2) = -8 - (-8) = 0$

$\int_{-2}^1 f(x) dx = F(1) - F(-2) = 10,125$, $\int_1^4 f(x) dx = F(4) - F(1) = -10,125$

Flächeninhalt: $10,125 + |-10,125| = 20,25$ (FE)

- 2 **1.7** Auf $[1; 4]$ liegt G_f unterhalb der x -Achse; das Integral zählt diesen Flächeninhalt negativ.

Die beiden gleich großen Teilflächen heben sich im Integral auf; eingeschlossen werden aber 20,25 FE.

Bewertung: 1 BE Vorzeichen des Integrals unterhalb der Achse, 1 BE Bilanz $\neq$ Flächeninhalt.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - A II - (Fortsetzung)	
4	2.1	Differenzen: 30; 36; 43; 52 – nicht konstant, also kein lineares Wachstum.
		Quotienten: $\frac{180}{150} = 1,2$; $\frac{216}{180} = 1,2$; $\frac{259}{216} \approx 1,2$; $\frac{311}{259} \approx 1,2$ – nahezu konstant.
		Die Entwicklung wird besser durch ein exponentielles Modell beschrieben (Wachstumsfaktor 1,2 je Monat).
2	2.2	$N(t) = 150 \cdot 1,2^t$ (Anfangswert 150, Faktor 1,2)
2	2.3	$1,2 = e^{\ln(1,2)}$, also $N(t) = 150 \cdot (e^{\ln(1,2)})^t = 150 \cdot e^{\ln(1,2) \cdot t}$ mit $k = \ln(1,2) \approx 0,182$
4	2.4	$150 \cdot 1,2^t = 1500 \iff 1,2^t = 10 \iff t = \frac{\ln(10)}{\ln(1,2)} \approx 12,63$
		Nach etwa 12,63 Monaten, also im dreizehnten Monat nach dem Start, nehmen erstmals 1500 Personen teil.
3	2.5	$\dot{N}(t) = 150 \cdot \ln(1,2) \cdot 1,2^t$; $\dot{N}(4) = 150 \cdot \ln(1,2) \cdot 1,2^4 \approx 57$
		Zum Zeitpunkt $t = 4$ wächst die Teilnehmerzahl momentan um etwa 57 Personen pro Monat.
3	2.6	Zuwachs im ersten Monat: 30; lineares Modell $L(t) = 150 + 30t$, also $L(4) = 270$.
		Die Tabelle zeigt 311 Teilnehmende, das exponentielle Modell liefert $N(4) \approx 311$: Das exponentielle Modell passt besser, das lineare unterschätzt das Wachstum.
3	2.7	$N(36) = 150 \cdot 1,2^{36} \approx 106320$ Teilnehmende.
		Das ist mehr als das Zweieinhalbfache der Einwohnerzahl der Stadt – unmöglich; das Wachstum wird sich abschwächen.
		Das Modell ist nur für die ersten Monate geeignet.
		<i>Bewertung:</i> 1 BE Rechnung, 1 BE Vergleich mit der Einwohnerzahl, 1 BE Folgerung.
43		

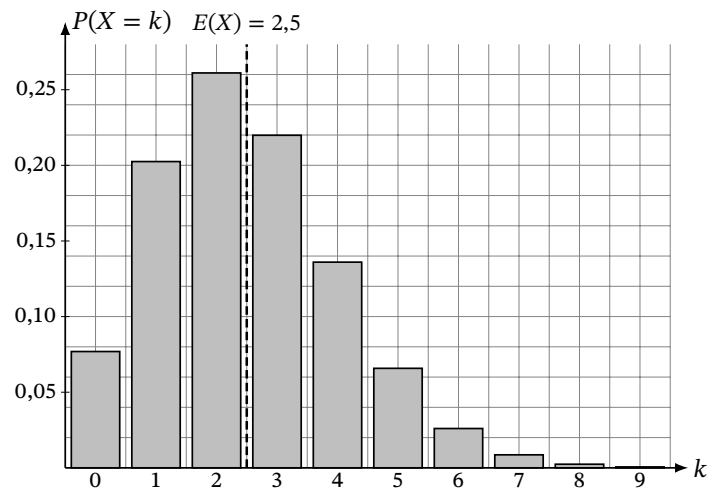
BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S I -

- 3 **1.1** a) Ja: zwei Ausgänge (erkannt oder nicht), Trefferwahrscheinlichkeit 0,05 bei jeder Flasche, unabhängig.
 b) Nein: Ohne Zurücklegen ändert sich die Wahrscheinlichkeit für ein beschädigtes Etikett bei jeder Entnahme.
 c) Nein: Es gibt keine feste Anzahl von Stufen mit jeweils zwei Ausgängen; gezählt wird nur eine Anzahl.

- 3 **1.2** $X \sim B(50; 0,05)$
 $P(X = 3) = B(50; 0,05; 3) = 0,21987; \quad P(X \leq 1) = 0,27943$

- 4 **1.3** Summe der Säulenhöhen bei $k = 1, \dots, 4: \approx 0,20 + 0,26 + 0,22 + 0,14 \approx 0,82$ (exakt 0,81944)
 Erwartungswert $E(X) = n p = 50 \cdot 0,05 = 2,5$ (gestrichelt):



Bewertung: Ablesewerte zwischen 0,79 und 0,85 sind zu akzeptieren.

- 2 **1.4** $E(X) = 2,5$: Bei sehr vielen Serien von je 50 Flaschen werden im Mittel 2,5 Flaschen pro Serie nicht erkannt.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S I - (Fortsetzung)	
4	2.1	Testgröße X : Anzahl der nicht erkannten Flaschen unter 100; $X \sim B(100; p)$
		$H_0 : p \leq 0,05; \quad H_1 : p > 0,05; \quad \text{Ablehnungsbereich } \bar{A} = \{k; \dots; 100\}$
		$P_{0,05}(X \geq k) \leq 0,05:$
		$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 0,02819, \quad P(X \geq 9) = 0,06309 \Rightarrow k = 10$
		Entscheidungsregel: Werden mindestens 10 Flaschen nicht erkannt, wird H_0 abgelehnt und die Vermutung der Marktleitung als gestützt angesehen; sonst nicht.
2	2.2	Fehler erster Art: Die Behauptung des Herstellers wird abgelehnt (mindestens 10 nicht erkannte Flaschen), obwohl tatsächlich höchstens 5 % der Flaschen nicht erkannt werden.
3	2.3	Gesucht ist $P_{0,1}(X \leq 9)$ (Fehler zweiter Art): $P(X \leq 9) = 0,45129$
		Mit etwa 45 % Wahrscheinlichkeit wird die falsche Behauptung des Herstellers nicht abgelehnt – der Test erkennt eine Verdopplung der Fehlerquote nur unzuverlässig.
2	2.4	11 liegt im Ablehnungsbereich: H_0 wird abgelehnt, die Vermutung der Marktleitung ist durch den Test gestützt.
		Sicher ist sie damit nicht; die Wahrscheinlichkeit, H_0 irrtümlich abzulehnen, beträgt aber höchstens 5 %.
23		

BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU TEIL 2 - S II -

3 1.1

	U	$\bar{U}$	Σ
L	0,30	0,10	0,40
$\bar{L}$	0,15	0,45	0,60
Σ	0,45	0,55	1

2 1.2 $P_U(L) = \frac{0,30}{0,45} = \frac{2}{3} \approx 0,667$ 3 1.3 Die Aussage ist falsch: Der Veranstalter verwechselt $P_U(L)$ mit $P_L(U)$.

$P_L(U) = \frac{0,30}{0,40} = 0,75$: Drei Viertel der 10-km-Läufer tragen eine Laufuhr (wie in 1.0 angegeben); zwei Drittel sind der Anteil der 10-km-Läufer unter den Laufuhrträgern.

Bewertung: volle BE nur mit Benennung der vertauschten Bedingung und dem richtigen Wert.

2 1.4 $P_{\bar{L}}(U) = \frac{0,15}{0,60} = 0,25$: Von den Teilnehmenden der 5-km-Strecke tragen 25 % eine Laufuhr.4 2.1 $P(X = 3) = 1 - 0,1 - 0,2 - 0,3 = 0,4$

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,1	0,2	0,3	0,4

$$E(X) = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,4 = 2,0$$

4 2.2 Im Mittel werden 2,0 Gutscheine pro Person eingelöst.

Kosten pro Person: $2,0 \cdot 1,50 \text{ €} = 3,00 \text{ €}$

Bei 2500 Teilnehmenden sind etwa $2500 \cdot 3,00 \text{ €} = 7500 \text{ €}$ zu erwarten (Erwartungswert, tatsächlicher Betrag schwankt).

2 3.1 Jede Person läuft entweder die 10-km-Strecke oder nicht (zwei Ausgänge); bei sehr vielen Teilnehmenden ändert die Auswahl von 20 Personen die Wahrscheinlichkeit 0,4 praktisch nicht (annähernd unabhängig): $Y \sim B(20; 0,4)$.3 3.2 Mindestens 14 auf der 5-km-Strecke $\iff$ höchstens 6 auf der 10-km-Strecke:
 $P(Y \leq 6) = 0,25001$

23