

Musterprüfung Nr. 006 (Nachtermin) zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 1: ohne Hilfsmittel

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben sämtliche Aufgaben zu bearbeiten.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

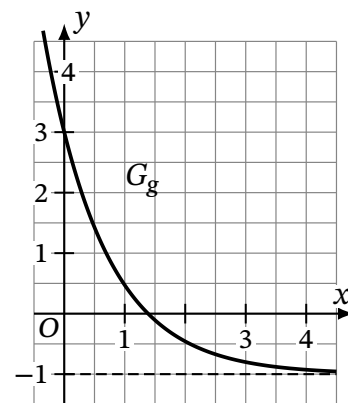
1.0 Gegeben ist die Funktion

$$f: x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

- 2 1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f samt ihrer Vielfachheit.
- 4 1.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f .
- 2 1.3 Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunkts von G_f .
- 3 1.4 Skizzieren Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse für $-0,3 \leq x \leq 4$.

2.0 Die Abbildung zeigt den Graphen G_g einer Funktion $g: x \mapsto a \cdot e^{-x} + b$ mit $D_g = \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ sowie die waagrechte Asymptote von G_g (gestrichelt).



- 3 2.1 Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung die Werte von a und b und begründen Sie Ihr Vorgehen.
- 2 2.2 Für die weitere Aufgabe gilt $g(x) = 4e^{-x} - 1$. Bestimmen Sie den Term derjenigen Stammfunktion G von g , für die $G(0) = 0$ gilt.
- 3.0 Gegeben sind die Funktionen $h: x \mapsto (x+1) \cdot e^x$ und $H: x \mapsto x \cdot e^x$, jeweils mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}$.
- 2 3.1 Zeigen Sie, dass H eine Stammfunktion von h ist.
- 2 3.2 Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von h mit der x -Achse und der y -Achse einschließt.
- 2 3.3 Begründen Sie ohne Rechnung, dass $\int_{-3}^{-1} h(x) dx$ einen negativen Wert hat.

22

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Bei Sammelkarten-Tütchen enthalten 25 % der Tütchen eine Glitzerkarte.

2 **1.1** Entscheiden Sie für die folgenden Vorgänge jeweils mit Begründung, ob es sich um ein Zufallsexperiment handelt:

a): Öffnen eines zufällig ausgewählten Tütchens und Nachsehen, ob es eine Glitzerkarte enthält

b): Ablesen des Preises eines Tütchens an der Kasse

2 **1.2** Zwei Tütchen werden zufällig gekauft. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau eines von ihnen eine Glitzerkarte enthält.

2.0 Ein quaderförmiger Holzklotz mit zwei großen, zwei mittleren und zwei kleinen Flächen wird geworfen; er bleibt auf einer großen (G) oder auf einer anderen Fläche liegen.

2 **2.1** Begründen Sie, dass es nicht sinnvoll ist, für jede der sechs Flächen die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ anzunehmen.

2 **2.2** Bei 600 Würfeln bleibt der Holzklotz 222-mal auf einer großen Fläche liegen. Bestimmen Sie damit einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses G und begründen Sie, warum dieser Schätzwert brauchbar ist.

3.0 Im Kleiderschrank liegen fünf T-Shirts, drei Hosen und zwei Paar Schuhe; ein Outfit besteht aus je einem dieser drei Kleidungsstücke.

2 **3.1** Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Outfits.

2 **3.2** Bei einem Lauf mit acht Teilnehmenden werden die Plätze 1 bis 3 auf dem Siegertreppchen vergeben. Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Belegungen des Siegertreppchens.

12

Musterprüfung Nr. 006 (Nachtermin) zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 2: mit Hilfsmitteln

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Stochastik* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

- 1.0** Die Anzahl der Abrufe eines neu veröffentlichten Musikstücks bei einem Musikstream pro Tag wird modellhaft durch die Funktion s mit

$$s(t) = 2000 \cdot t \cdot e^{-0,25 \cdot t}, \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

beschrieben. Dabei ist t die Zeit in Tagen seit der Veröffentlichung und $s(t)$ die momentane Anzahl der Abrufe pro Tag. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 3 **1.1** Untersuchen Sie das Verhalten von $s(t)$ für $t = 0$ und für $t \rightarrow \infty$ und deuten Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.
- 5 **1.2** Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem das Musikstück am häufigsten abgerufen wird, und die zugehörige Anzahl der Abrufe pro Tag.
[Teilergebnis: $\dot{s}(t) = 500 \cdot (4 - t) \cdot e^{-0,25 \cdot t}$]
- 4 **1.3** Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Anzahl der Abrufe pro Tag am stärksten abnimmt.
- 4 **1.4** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen von s für $0 \leq t \leq 24$ in ein Koordinatensystem.
Maßstab: 1 Tag $\hat{=}$ 0,5 cm; 1000 Abrufe pro Tag $\hat{=}$ 1 cm
Verwenden Sie dazu die folgende Wertetabelle.

t	0	4	8	12	16	20	24
$s(t)$							

- 3 **1.5** Zeigen Sie, dass die Funktion S mit
- $$S(t) = 32000 - 8000 \cdot (t + 4) \cdot e^{-0,25 \cdot t}$$
- eine Stammfunktion von s mit $S(0) = 0$ ist.
- 3 **1.6** Berechnen Sie die Gesamtzahl der Abrufe in den ersten 12 Tagen nach der Veröffentlichung.
- 3 **1.7** Eine Musikerin meint: „Weil die Anzahl der Abrufe pro Tag nie null wird, wächst die Gesamtzahl der Abrufe mit der Zeit über jede Grenze.“
Untersuchen Sie diese Aussage im Rahmen des Modells.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 2.0** Eine Imkerei verkauft Honig. Der monatliche Gewinn in Euro wird in Abhängigkeit von der Anzahl x der abgefüllten und verkauften Gläser (in Hundert) modellhaft durch die Funktion G mit

$$G(x) = -10x^3 + 120x^2 - 210x - 440, \quad 0 \leq x \leq 10$$

beschrieben.

- 2.1** Deuten Sie den Wert $G(0)$ im Sachzusammenhang.
- 2.2** Zeigen Sie, dass $x = 4$ eine Nullstelle von G ist, und ermitteln Sie den Bereich, in dem die Imkerei mit Gewinn arbeitet (Gewinnzone).
- 2.3** Ermitteln Sie die Anzahl der Gläser, bei der der Gewinn am größten ist, sowie diesen größten Gewinn.
- 2.4** Die Imkerei kann im Monat höchstens 800 Gläser abfüllen. Untersuchen Sie, wie viele Gläser sie unter dieser Bedingung abfüllen sollte, und geben Sie den dann größtmöglichen Gewinn an.
- 2.5** Berechnen Sie $G'(6)$ und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.
- 2.6** Ermitteln Sie die Anzahl der Gläser, bei der der Gewinn am stärksten zunimmt, und geben Sie die momentane Änderungsrate des Gewinns an dieser Stelle an.

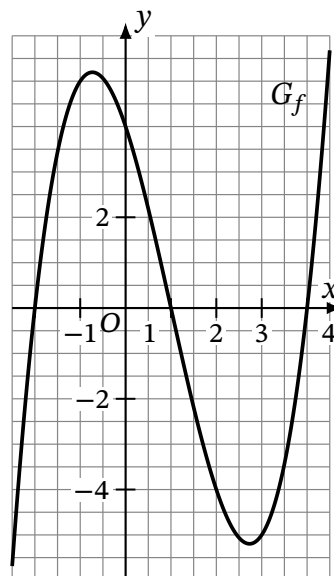
43

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion

$$f: x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 3x + 4, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f . Die Funktion F ist diejenige Stammfunktion von f , für die $F(0) = 0$ gilt.



- 3 1.1 Bestimmen Sie rechnerisch die Nullstellen der Funktion f .
- 4 1.2 Begründen Sie mithilfe der Abbildung, an welchen Stellen der Graph von F relative Extrempunkte hat, und geben Sie jeweils deren Art an.
- 3 1.3 Die drei folgenden Wertetabellen gehören zu den Funktionen f , F und f' . Entscheiden Sie mit Begründung, welche Tabelle zu welcher Funktion gehört.

x	-2	-1	0	1	2
I	0	5	4	0	-4

x	-2	-1	0	1	2
II	9	1,5	-3	-4,5	-3

x	-2	-1	0	1	2
III	-8	-4,875	0	2,125	0

- 2 1.4 Bestimmen Sie den Term von F .
- 4 1.5 Skizzieren Sie den Graphen von F für $-2,5 \leq x \leq 4,5$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse.
- 4 1.6 Berechnen Sie $\int_{-2}^4 f(x) dx$ sowie den Inhalt der Fläche, die G_f mit der x -Achse einschließt.
- 2 1.7 Eine Mitschülerin meint: „Weil das Integral aus 1.6 den Wert null hat, schließt G_f zwischen -2 und 4 keine Fläche mit der x -Achse ein.“ Begründen Sie, dass diese Aussage falsch ist.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 2.0** An einer monatlichen Lauf-Challenge einer Stadt mit etwa 40 000 Einwohnern nehmen im ersten Monat 150 Personen teil. Die Tabelle zeigt die Anzahl der Teilnehmenden in den ersten Monaten (t in Monaten seit dem Start).

t	0	1	2	3	4
Teilnehmende	150	180	216	259	311

- 2.1** Untersuchen Sie, ob die Entwicklung besser durch ein lineares oder durch ein exponentielles Modell beschrieben wird.
- 2.2** Geben Sie einen Term $N(t)$ für ein passendes exponentielles Modell an.
Im Folgenden gilt:
- $$N(t) = 150 \cdot 1,2^t$$
- 2.3** Zeigen Sie, dass sich $N(t)$ in der Form $N(t) = 150 \cdot e^{k \cdot t}$ schreiben lässt, und geben Sie k auf drei Nachkommastellen gerundet an.
- 2.4** Ermitteln Sie, in welchem Monat nach dem Modell erstmals 1500 Personen teilnehmen.
- 2.5** Berechnen Sie die momentane Zunahme der Teilnehmerzahl pro Monat zum Zeitpunkt $t = 4$.
- 2.6** Ein Organisator modelliert die Entwicklung linear mit dem Zuwachs des ersten Monats. Untersuchen Sie, welche Teilnehmerzahl sein Modell für $t = 4$ liefert, und entscheiden Sie mithilfe der Tabelle, welches Modell besser passt.
- 2.7** Untersuchen Sie, ob das exponentielle Modell auch für eine Laufzeit der Challenge von drei Jahren geeignet ist.

43

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Ein Pfandautomat in einem Supermarkt erkennt 5 % aller zurückgegebenen Flaschen nicht (Fehlererkennung).

3 1.1 Entscheiden Sie jeweils mit Begründung, ob die folgenden Zufallsexperimente als Bernoulli-Ketten aufgefasst werden können:

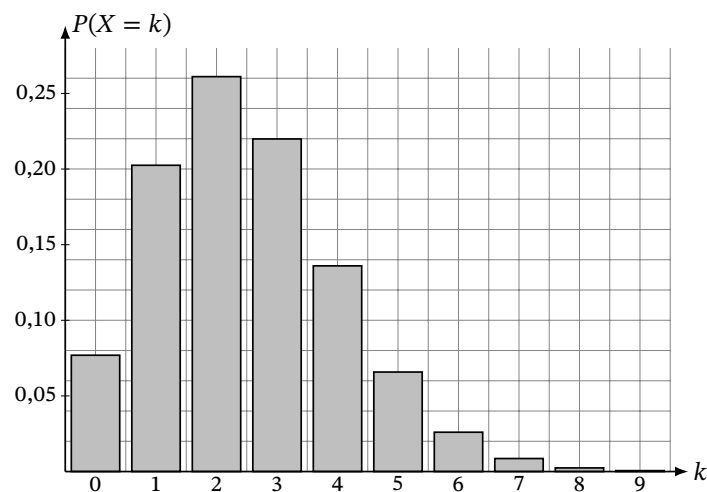
a): Bei 50 zurückgegebenen Flaschen wird gezählt, wie oft eine Flasche nicht erkannt wird.

b): Aus einem Kasten mit 20 Flaschen, von denen 4 ein beschädigtes Etikett haben, werden nacheinander 5 Flaschen ohne Zurücklegen entnommen.

c): Es wird gezählt, wie viele Flaschen an einem Tag insgesamt zurückgegeben werden.

3 1.2 Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der nicht erkannten Flaschen unter 50 zurückgegebenen Flaschen an. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass genau drei bzw. höchstens eine Flasche nicht erkannt werden.

4 1.3 Das Histogramm zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X (Werte für $k > 9$ sind nicht dargestellt). Bestimmen Sie mithilfe des Histogramms näherungsweise $P(1 \leq X \leq 4)$ und kennzeichnen Sie den Erwartungswert von X im Histogramm.



2 1.4 Interpretieren Sie den Erwartungswert von X im Sachzusammenhang.

BE

- | | | |
|---|------------|---|
| | 2.0 | Der Hersteller behauptet, dass höchstens 5 % der Flaschen nicht erkannt werden. Die Marktleitung vermutet dagegen, dass der Anteil größer ist. Sie testet die Behauptung des Herstellers (Nullhypothese) auf einem Signifikanzniveau von 5 % anhand von 100 zurückgegebenen Flaschen. |
| 4 | 2.1 | Entwickeln Sie einen geeigneten Hypothesentest und formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel. |
| 2 | 2.2 | Beschreiben Sie den Fehler erster Art im Sachzusammenhang. |
| 3 | 2.3 | Tatsächlich werden 10 % der Flaschen nicht erkannt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Test die Behauptung des Herstellers trotzdem nicht ablehnt. |
| 2 | 2.4 | Von den 100 Flaschen werden 11 nicht erkannt. Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Hinblick auf die Vermutung der Marktleitung. |

23

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0** Bei einem Volkslauf laufen 40 % der Teilnehmenden die 10-km-Strecke (L), die übrigen die 5-km-Strecke. Von den 10-km-Läufern tragen 75 % eine Laufuhr (U); insgesamt tragen 45 % aller Teilnehmenden eine Laufuhr. Eine teilnehmende Person wird zufällig ausgewählt.
- 1.1** Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel für die Ereignisse L und U .
- 1.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person mit Laufuhr die 10-km-Strecke läuft.
- 1.3** Ein Veranstalter folgert aus 1.2: „Also tragen auch zwei Drittel der 10-km-Läufer eine Laufuhr.“
Untersuchen Sie diese Aussage.
- 1.4** Berechnen Sie den Anteil der Laufuhrträger unter den Teilnehmenden der 5-km-Strecke.
- 2.0** Jede teilnehmende Person erhält drei Gutscheine für ein Getränk im Zielbereich; jeder eingelöste Gutschein kostet den Veranstalter 1,50 €. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Gutscheine an, die eine zufällig ausgewählte Person einlöst. Es gilt $P(X = 0) = 0,1$, $P(X = 1) = 0,2$ und $P(X = 2) = 0,3$.
- 2.1** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und den Erwartungswert von X .
- 2.2** Ermitteln Sie die Kosten, die dem Veranstalter pro Person durch eingelöste Gutscheine im Mittel entstehen, und die zu erwartenden Gesamtkosten bei 2500 Teilnehmenden.
- 3.0** 20 Teilnehmende werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße Y gibt an, wie viele von ihnen die 10-km-Strecke laufen.
- 3.1** Begründen Sie, dass Y näherungsweise als binomialverteilt angesehen werden kann.
- 3.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 14 der ausgewählten Personen die 5-km-Strecke laufen.

23