

Musterprüfung Nr. 006 zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 60 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 1: ohne Hilfsmittel

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben sämtliche Aufgaben zu bearbeiten.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

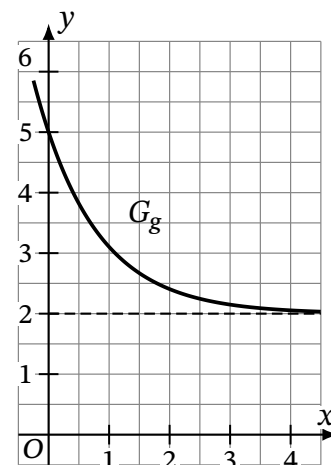
1.0 Gegeben ist die Funktion

$$f: x \mapsto -x^3 + 3x^2, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Der Graph von f in einem kartesischen Koordinatensystem wird mit G_f bezeichnet.

- 2 1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f samt ihrer Vielfachheit.
- 4 1.2 Ermitteln Sie jeweils die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte von G_f .
- 2 1.3 Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunkts von G_f .
- 3 1.4 Skizzieren Sie G_f unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse für $-1 \leq x \leq 3,5$.

2.0 Die Abbildung zeigt den Graphen G_g einer Funktion $g: x \mapsto a \cdot e^{-x} + b$ mit $D_g = \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ sowie die waagrechte Asymptote von G_g (gestrichelt).



- 3 2.1 Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung die Werte von a und b und begründen Sie Ihr Vorgehen.
- 2 2.2 Für die weitere Aufgabe gilt $g(x) = 3e^{-x} + 2$. Bestimmen Sie den Term derjenigen Stammfunktion G von g , für die $G(0) = 0$ gilt.
- 3.0 Gegeben sind die Funktionen $h: x \mapsto x \cdot e^x$ und $H: x \mapsto (x - 1) \cdot e^x$, jeweils mit der Definitionsmenge $\mathbb{R}$.
- 2 3.1 Zeigen Sie, dass H eine Stammfunktion von h ist.
- 2 3.2 Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von h mit der x -Achse und der Geraden $x = 1$ einschließt.
- 2 3.3 Begründen Sie ohne Rechnung, dass $\int_{-2}^0 h(x) dx$ einen negativen Wert hat.

22

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 In einer großen Packung Glückskekse enthalten 30 % der Kekse einen Gutschein.

2 **1.1** Entscheiden Sie für die folgenden Vorgänge jeweils mit Begründung, ob es sich um ein Zufallsexperiment handelt:

a): Öffnen eines zufällig aus der Packung genommenen Kekses und Nachsehen, ob er einen Gutschein enthält

b): Ablesen der Anzahl der Kekse auf der Packung

2 **1.2** Zwei Kekse werden zufällig entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau einer von ihnen einen Gutschein enthält.

2.0 Ein Reißnagel wird geworfen; er bleibt entweder auf dem Kopf (K) oder auf der Seite (S) liegen.

2 **2.1** Begründen Sie, dass es nicht sinnvoll ist, für die beiden Ergebnisse jeweils die Wahrscheinlichkeit 0,5 anzunehmen.

2 **2.2** Bei 500 Würfeln bleibt der Reißnagel 310-mal auf der Seite liegen. Bestimmen Sie damit einen Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses S und begründen Sie, warum dieser Schätzwert brauchbar ist.

3.0 In einer Mensa kann man sich ein Menü aus einem von drei Hauptgerichten, einer von vier Beilagen und einem von zwei Desserts zusammenstellen.

2 **3.1** Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Menüs.

2 **3.2** Für eine Staffel werden aus fünf Läuferinnen vier ausgewählt und in eine Laufreihenfolge gebracht. Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Aufstellungen.

12

Musterprüfung Nr. 006 zum Fachabitur
zum Erwerb der Fachhochschulreife
an Fachoberschulen und Berufsoberschulen

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Mathematik

Nichttechnische Ausbildungsrichtungen

Teil 2: mit Hilfsmitteln

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen Hilfsmittel verwendet werden.

- Die Schülerinnen und Schüler haben je eine Aufgabe aus den Aufgabengruppen *Analysis* und *Stochastik* zu bearbeiten. Die Auswahl trifft die Schule.
- Das Geheft mit den Aufgabenstellungen ist am Ende der Bearbeitungszeit abzugeben.

Name des Prüflings	Klasse

BE

- 1.0** Die Anzahl der Aufrufe eines Beitrags in einem sozialen Netzwerk pro Stunde wird für die Zeit nach der Veröffentlichung modellhaft durch die Funktion a mit

$$a(t) = 1200 \cdot t \cdot e^{-0,5 \cdot t}, \quad t \in \mathbb{R}_0^+$$

beschrieben. Dabei ist t die Zeit in Stunden seit der Veröffentlichung und $a(t)$ die momentane Anzahl der Aufrufe pro Stunde. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

- 3 1.1** Untersuchen Sie das Verhalten von $a(t)$ für $t = 0$ und für $t \rightarrow \infty$ und deuten Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.
- 5 1.2** Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem der Beitrag am häufigsten aufgerufen wird, und die zugehörige Anzahl der Aufrufe pro Stunde.
[Teilergebnis: $\dot{a}(t) = 600 \cdot (2 - t) \cdot e^{-0,5 \cdot t}$]
- 4 1.3** Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem die Anzahl der Aufrufe pro Stunde am stärksten abnimmt.
- 4 1.4** Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse den Graphen von a für $0 \leq t \leq 10$ in ein Koordinatensystem.
Maßstab: 1 h $\hat{=}$ 1 cm; 100 Aufrufe pro Stunde $\hat{=}$ 0,5 cm
Verwenden Sie dazu die folgende Wertetabelle.

t	0	1	2	4	6	8	10
$a(t)$							

- 3 1.5** Zeigen Sie, dass die Funktion A mit
- $$A(t) = 4800 - 2400 \cdot (t + 2) \cdot e^{-0,5 \cdot t}$$
- eine Stammfunktion von a mit $A(0) = 0$ ist.
- 3 1.6** Berechnen Sie die Gesamtzahl der Aufrufe in den ersten 6 Stunden nach der Veröffentlichung.
- 3 1.7** Ein Nutzer meint: „Weil die Anzahl der Aufrufe pro Stunde nie null wird, wächst die Gesamtzahl der Aufrufe mit der Zeit über jede Grenze.“
Untersuchen Sie diese Aussage im Rahmen des Modells.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 2.0** Ein Hofladen stellt Marmelade her. Der monatliche Gewinn in Euro wird in Abhängigkeit von der Anzahl x der hergestellten und verkauften Gläser (in Hundert) modellhaft durch die Funktion G mit

$$G(x) = -10x^3 + 120x^2 - 210x - 180, \quad 0 \leq x \leq 10$$

beschrieben.

- 2.1** Deuten Sie den Wert $G(0)$ im Sachzusammenhang.
- 2.2** Zeigen Sie, dass $x = 3$ eine Nullstelle von G ist, und ermitteln Sie den Bereich, in dem der Hofladen mit Gewinn arbeitet (Gewinnzone).
- 2.3** Ermitteln Sie die Anzahl der Gläser, bei der der Gewinn am größten ist, sowie diesen größten Gewinn.
- 2.4** Der Hofladen kann im Monat höchstens 600 Gläser herstellen. Untersuchen Sie, wie viele Gläser er unter dieser Bedingung herstellen sollte, und geben Sie den dann größtmöglichen Gewinn an.
- 2.5** Berechnen Sie $G'(3)$ und deuten Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.
- 2.6** Ermitteln Sie die Anzahl der Gläser, bei der der Gewinn am stärksten zunimmt, und geben Sie die momentane Änderungsrate des Gewinns an dieser Stelle an.

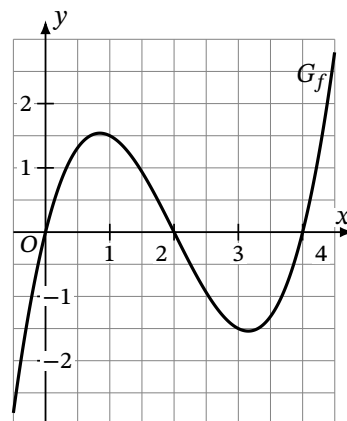
43

BE

1.0 Gegeben ist die Funktion

$$f: x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + 4x, \quad D_f = \mathbb{R}$$

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f . Die Funktion F ist diejenige Stammfunktion von f , für die $F(0) = 0$ gilt.



- 3 1.1 Bestimmen Sie rechnerisch die Nullstellen der Funktion f .
- 4 1.2 Begründen Sie mithilfe der Abbildung, an welchen Stellen der Graph von F relative Extrempunkte hat, und geben Sie jeweils deren Art an.
- 3 1.3 Die drei folgenden Wertetabellen gehören zu den Funktionen f , F und f' . Entscheiden Sie mit Begründung, welche Tabelle zu welcher Funktion gehört.

x	0	1	2	3	4
I	4	-0,5	-2	-0,5	4

x	0	1	2	3	4
II	0	1,125	2	1,125	0

x	0	1	2	3	4
III	0	1,5	0	-1,5	0

- 2 1.4 Bestimmen Sie den Term von F .
- 4 1.5 Skizzieren Sie den Graphen von F für $-0,5 \leq x \leq 4,5$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse.
- 4 1.6 Berechnen Sie $\int_0^4 f(x) dx$ sowie den Inhalt der Fläche, die G_f mit der x -Achse einschließt.
- 2 1.7 Ein Mitschüler meint: „Weil das Integral aus 1.6 den Wert null hat, schließt G_f zwischen 0 und 4 keine Fläche mit der x -Achse ein.“ Begründen Sie, dass diese Aussage falsch ist.

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE

- 2.0** Der Kanal der Schülerzeitung einer Schule in einem sozialen Netzwerk hat zu Beginn des Schuljahres 200 Follower. Die Tabelle zeigt die Anzahl der Follower jeweils zu Beginn der ersten Monate (t in Monaten seit Schuljahresbeginn).

t	0	1	2	3	4
Follower	200	260	338	439	571

- 2.1** Untersuchen Sie, ob die Entwicklung besser durch ein lineares oder durch ein exponentielles Modell beschrieben wird.
- 2.2** Geben Sie einen Term $N(t)$ für ein passendes exponentielles Modell an.
Im Folgenden gilt:
- $$N(t) = 200 \cdot 1,3^t$$
- 2.3** Zeigen Sie, dass sich $N(t)$ in der Form $N(t) = 200 \cdot e^{k \cdot t}$ schreiben lässt, und geben Sie k auf drei Nachkommastellen gerundet an.
- 2.4** Ermitteln Sie, in welchem Monat der Kanal nach dem Modell erstmals 2000 Follower hat.
- 2.5** Berechnen Sie die momentane Zunahme der Followerzahl pro Monat zum Zeitpunkt $t = 4$.
- 2.6** Eine Schülerin modelliert die Entwicklung linear mit dem Zuwachs des ersten Monats. Untersuchen Sie, welche Followerzahl ihr Modell für $t = 4$ liefert, und entscheiden Sie mithilfe der Tabelle, welches Modell besser passt.
- 2.7** Untersuchen Sie, ob das exponentielle Modell auch für die gesamten drei Jahre bis zum Abschluss geeignet ist.

43

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

1.0 Ein Snackautomat in einer Schule gibt bei 10 % aller Bestellungen das gewählte Produkt nicht aus (Fehlausgabe).

3 1.1 Entscheiden Sie jeweils mit Begründung, ob die folgenden Zufallsexperimente als Bernoulli-Ketten aufgefasst werden können:

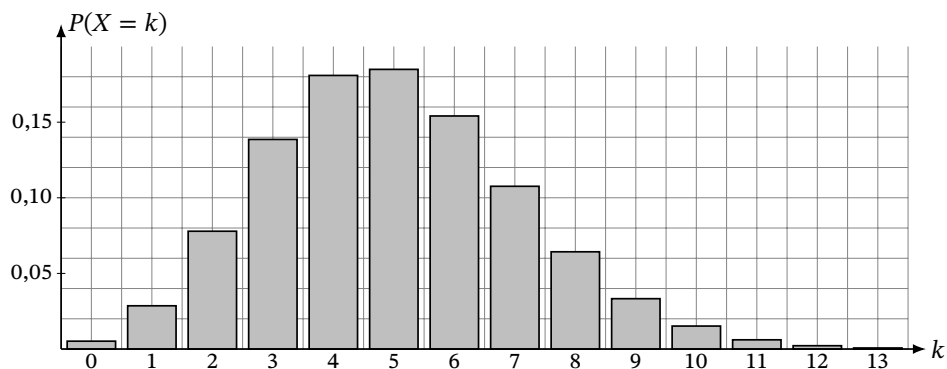
a): Bei 50 Bestellungen wird gezählt, wie oft eine Fehlausgabe auftritt.

b): Aus einer Kiste mit 12 Schokoriegeln, von denen 3 beschädigt sind, werden nacheinander 4 Riegel ohne Zurücklegen entnommen.

c): Es wird gezählt, wie viele Bestellungen an einem Schultag insgesamt eingehen.

3 1.2 Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Fehlausgaben bei 50 Bestellungen an. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass genau fünf bzw. höchstens drei Fehlausgaben auftreten.

4 1.3 Das Histogramm zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X (Werte für $k > 13$ sind nicht dargestellt). Bestimmen Sie mithilfe des Histogramms näherungsweise $P(3 \leq X \leq 7)$ und kennzeichnen Sie den Erwartungswert von X im Histogramm.



2 1.4 Interpretieren Sie den Erwartungswert von X im Sachzusammenhang.

2.0 Nach einer Reparatur behauptet der Betreiber, dass höchstens 10 % der Bestellungen zu einer Fehlausgabe führen. Die Schülervertretung vermutet dagegen, dass der Anteil größer ist. Sie testet die Behauptung des Betreibers (Nullhypothese) auf einem Signifikanzniveau von 5 % anhand von 100 Bestellungen.

4 2.1 Entwickeln Sie einen geeigneten Hypothesentest und formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

2 2.2 Beschreiben Sie den Fehler erster Art im Sachzusammenhang.

3 2.3 Tatsächlich führen 20 % der Bestellungen zu einer Fehlausgabe. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Test die Behauptung des Betreibers trotzdem nicht ablehnt.

2 2.4 Bei den 100 Bestellungen treten 14 Fehlausgaben auf. Interpretieren Sie dieses Ergebnis im Hinblick auf die Vermutung der Schülervertretung.

23

BE

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

- 1.0** Bei einem Musikfestival reisen 60 % der Besucher mit dem Zug an (Z). Von den Zugreisenden übernachten 40 % auf dem Campingplatz (C); insgesamt übernachten 30 % aller Besucher auf dem Campingplatz. Ein Besucher wird zufällig ausgewählt.
- 1.1** Erstellen Sie eine vollständig ausgefüllte Vierfeldertafel für die Ereignisse Z und C .
- 1.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Camper mit dem Zug angereist ist.
- 1.3** Ein Veranstalter folgert aus 1.2: „Also übernachten auch 80 % der Zugreisenden auf dem Campingplatz.“
Untersuchen Sie diese Aussage.
- 1.4** Berechnen Sie den Anteil der Camper unter den Besuchern, die nicht mit dem Zug anreisen.
- 2.0** Jeder Besucher erhält seine Getränke in zwei Pfandbechern; das Pfand beträgt 3 € pro Becher und wird bei Rückgabe erstattet. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Becher an, die ein zufällig ausgewählter Besucher zurückgibt. Es gilt $P(X = 0) = 0,1$ und $P(X = 1) = 0,3$.
- 2.1** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und den Erwartungswert von X .
- 2.2** Ermitteln Sie den Betrag, der dem Veranstalter pro Besucher durch nicht zurückgegebene Becher im Mittel verbleibt, und den zu erwartenden Gesamtbetrag bei 8000 Besuchern.
- 3.0** 20 Besucher werden zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße Y gibt an, wie viele von ihnen nicht mit dem Zug anreisen.
- 3.1** Begründen Sie, dass Y näherungsweise als binomialverteilt angesehen werden kann.
- 3.2** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 15 der ausgewählten Besucher mit dem Zug anreisen.

23