

1. Schulaufgabe aus dem Fach Mathematik (11NT)

Lösungshinweise

Themen: Zufallsexperimente und Gesetz der großen Zahlen, Baumdiagramm und Pfadregeln, Ereignisse, Vierfeldertafel, bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit, Kombinatorik

Notenschlüssel (Vorschlag: Prozentgrenzen wie Fachabitur, 50 Bewertungseinheiten):

Note	1+	1	1–	2+	2	2–	3+	3	3–	4+	4	4–	5+	5	5–	6
Notenpunkte	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
BE ab	48	45,5	43	40,5	38	35,5	33	30,5	28	25,5	23	20,5	17	13,5	10	0

BE

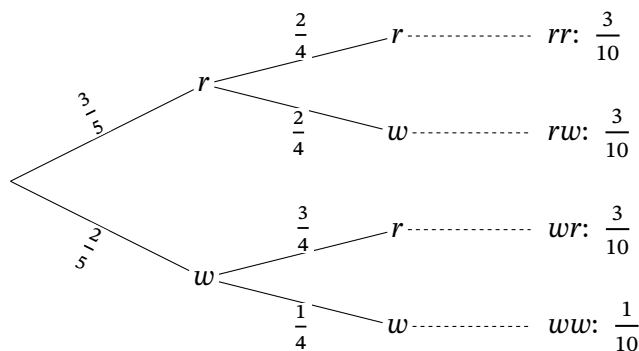
- LÖSUNGSHINWEISE ZU STOCHASTIK -

6 1

Aussage	w	f	n. e.
Das Werfen eines Reißnagels ist ein Zufallsexperiment.	x		
Das Werfen eines Reißnagels ist ein Laplace-Experiment mit den Ergebnissen „Spitze oben“ und „Spitze schräg unten“.		x	
Ist bei einer Laplace-Münze fünfmal hintereinander „Zahl“ gefallen, so ist beim nächsten Wurf „Kopf“ wahrscheinlicher.		x	
Je öfter ein Laplace-Würfel geworfen wird, desto weniger weicht die relative Häufigkeit der Sechs in der Regel von $\frac{1}{6}$ ab.	x		
Bei 600 Würfeln eines Laplace-Würfels fällt genau 100-mal eine Sechs.		x	
Bei einem Zufallsexperiment kann ein Ereignis die Wahrscheinlichkeit 0 haben.	x		

Begründungen (nicht verlangt): Der Ausgang eines Reißnagelwurfs ist nicht vorhersagbar, die beiden Lagen sind aber nicht gleich wahrscheinlich (vgl. Aufgabe 5). Die Münze „erinnert“ sich nicht – jeder Wurf hat wieder $P(\text{Kopf}) = \frac{1}{2}$. Das Gesetz der großen Zahlen sagt nur, dass sich die relative Häufigkeit stabilisiert, nicht, dass genau 100 Sechsen fallen. Das unmögliche Ereignis $\emptyset$ hat die Wahrscheinlichkeit 0.

4 2.1



$$\Omega = \{rr; rw; wr; ww\}$$

Bewertung: 2 BE Baum mit richtigen Wahrscheinlichkeiten auf der zweiten Stufe (ohne Zurücklegen), 1 BE Pfadwahrscheinlichkeiten, 1 BE Ergebnisraum.

Fortsetzung siehe nächste Seite

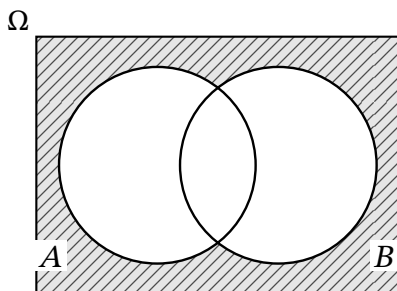
BE

- LÖSUNGSHINWEISE ZU STOCHASTIK - (Fortsetzung)

3 2.2 $A = \{rr; wr\}$, $P(A) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$
 $B = \{rr; ww\}$, $P(B) = \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{2}{5}$

3 2.3 $A \cap B = \{rr\}$: „Beide gezogenen Kugeln sind rot.“
 $A \cup B = \{rr; wr; ww\}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$
(oder $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{6}{10} + \frac{4}{10} - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$)

2 2.4 $\bar{A} \cap \bar{B} = \{rw\}$: „Die erste Kugel ist rot, die zweite weiß.“ (schraffiert)



Nach De Morgan ist $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$, also $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$.

2 2.5 $P(B)$ wird größer: Mit Zurücklegen bleibt die Wahrscheinlichkeit, wieder dieselbe Farbe zu ziehen, so groß wie beim ersten Zug ($\frac{3}{5}$ bzw. $\frac{2}{5}$); ohne Zurücklegen fehlt die gezogene Kugel ($\frac{2}{4}$ bzw. $\frac{1}{4}$).

Bewertung: Rechnung ($\frac{9}{25} + \frac{4}{25} = \frac{13}{25} > \frac{2}{5}$) nicht verlangt, wird aber voll bewertet.

4 3.1

	G	$\bar{G}$	Σ
M	60	60	120
$\bar{M}$	20	60	80
Σ	80	120	200

$P(G \cap M) = \frac{60}{200} = 0,3$

3 3.2 $P_G(M) = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}$: Drei Viertel der Ganztagschülerinnen und -schüler essen in der Mensa.

$P_M(G) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$: Die Hälfte der Mensagäste ist im Ganztags.

Gleicher Zähler, aber verschiedene Bedingung: Es gibt mehr Mensagäste (120) als Ganztagschüler (80).

3 3.3 $P(G) \cdot P(M) = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24 \neq 0,3 = P(G \cap M) \Rightarrow$ abhängig.

Ganztagschüler essen häufiger in der Mensa (75 %) als die Schülerschaft insgesamt (60 %).

Fortsetzung siehe nächste Seite

BE	- LÖSUNGSHINWEISE ZU STOCHASTIK - (Fortsetzung)	
3	3.4	Die Aussage trifft nicht zu: Der Anteil der Ganztagschüler unter den Mensagästen ist $P_M(G) = \frac{1}{2}$. Die „drei Viertel“ sind $P_G(M)$ – Ereignis und Bedingung wurden vertauscht. <i>Bewertung:</i> 1 BE richtige bedingte Wahrscheinlichkeit, 1 BE Urteil, 1 BE Benennung des Denkfehlers.
2	4.1	Vier Ringe mit je 10 Ziffern (geordnet, Wiederholung möglich): $10^4 = 10\,000$ Kombinationen
4	4.2	Höchstens $10\,000 : 20 = 500$ Minuten, also gut 8 Stunden; im Mittel findet der Dieb die Kombination schon nach etwa der Hälfte, rund 4 Stunden. Empfehlung (eine genügt): ein Schloss mit mehr Ringen (jeder zusätzliche Ring verzehnfacht die Anzahl), zusätzlich ein Bügelschloss oder das Rad an einem festen Gegenstand anschließen. <i>Bewertung:</i> 2 BE Zeit, 2 BE begründete Empfehlung mit Bezug zur Anzahl der Kombinationen.
3	4.3	(a) Die Reihenfolge zählt (Sprecher und Stellvertretung): $12 \cdot 11 = 132$ Möglichkeiten. (b) Die Reihenfolge zählt nicht: $\binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ Möglichkeiten – jedes Paar wurde in (a) doppelt gezählt.
3	4.4	Anzahl der Möglichkeiten, zwei von sechs Feldern anzukreuzen: $\binom{6}{2} = 15$; genau eine davon trifft beide Gewinnfelder. $P(\text{„beide Gewinnfelder“}) = \frac{1}{15}$
2	5.1	$P(\text{„Spitze oben“}) \approx 0,41$ – der Wert nach den meisten Würfeln ($n = 1000$) ist nach dem Gesetz der großen Zahlen am verlässlichsten; ab etwa $n = 600$ schwanken die Werte nur noch wenig um 0,41.
3	5.2	Die Folgerung trifft nicht zu: 0,41 ist nur ein Schätzwert; bei 1000 weiteren Würfeln sind etwa 410 Treffer zu erwarten, die tatsächliche Anzahl schwankt aber zufällig um diesen Wert. „Genau 410“ ist nur ein mögliches Ergebnis. <i>Bewertung:</i> 1 BE Schätzwert statt exakter Wahrscheinlichkeit, 1 BE zufällige Schwankung, 1 BE Urteil.
50		